БПОУ ВО «ГРЯЗОВЕЦКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

УТВЕРЖДАЮ
Директор БПОУ ВО
«Грязовецкий
политехнический техникум»
________ А.С. Маслов
__31__ августа ____ 2018 года

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии
общеобразовательных, общегуманитарных
и социально-экономических дисциплин
Протокол №_1__
от «__30_»___августа_________ 2018 г.
Председатель ЦК
________________ Е.В. Зиновьева

СОГЛАСОВАНО
Зам директора по ОМР
________ Е.А. Ткаченко

«__30_» ___августа_2018 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 «Математика»

Специальность: 35.02.07 Механизация сельского хозяйства

г. Грязовец
2018

Общие методические указания

Методические указания по выполнению внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине «Математика» ставят своей целью оказать помощь студентам второго курса в организации самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений, навыков в объеме действующей программы.

Объем самостоятельной работы студентов определяется государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования (ФГОС СПО).

Выполнение внеаудиторной самостоятельной работы является обязательной для каждого студента, её объём в часах определяется действующим рабочим учебным планом техникума.

Самостоятельная внеаудиторная работа по математике проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Внеаудиторная самостоятельная работа выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия. По математике используются следующие виды заданий для внеаудиторной самостоятельной работы:

- для овладения знаниями: чтение текста (учебника, дополнительной литературы), работа со словарями и справочниками, источниками Интернета;
- для закрепления и систематизации знаний: повторная работа над учебным материалом (учебника, дополнительной литературы), решение задач и упражнений, подготовка рефератов к выступлению на уроке.

В самостоятельную работу включены задания, направленные на формирование у студентов компетенций, необходимых для качественного освоения ОПОП СПО на базе основного общего образования с получением среднего общего образования; программы подготовки квалифицированных рабочих, служащих; программы подготовки специалистов среднего звена

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и в команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.1. Выполнять регулировку узлов, систем и механизмов двигателя и приборов электрооборудования.

ПК 1.2. Подготавливать почвообрабатывающие машины.

ПК 1.3. Подготавливать посевные, посадочные машины и машины для ухода за посевами.

ПК 1.4. Подготавливать уборочные машины.

ПК 1.5. Подготавливать машины и оборудование для обслуживания животноводческих ферм, комплексов и птицефабрик.

ПК 1.6. Подготавливать рабочее и вспомогательное оборудование тракторов и автомобилей.

ПК 2.1. Определять рациональный состав агрегатов и их эксплуатационные показатели.

ПК 2.2. Комплектовать машинно-тракторный агрегат.

ПК 2.3. Проводить работы на машинно-тракторном агрегате.

ПК 2.4. Выполнять механизированные сельскохозяйственные работы.

ПК 3.1. Выполнять техническое обслуживание сельскохозяйственных машин и механизмов.

ПК 3.2. Проводить диагностирование неисправностей сельскохозяйственных машин и механизмов.

ПК 3.3. Осуществлять технологический процесс ремонта отдельных деталей и узлов машин и механизмов.

ПК 3.4. Обеспечивать режимы консервации и хранения сельскохозяйственной техники.

ПК 4.1. Участвовать в планировании основных показателей машинно-тракторного парка сельскохозяйственного предприятия.

ПК 4.2. Планировать выполнение работ исполнителями.

ПК 4.3. Организовывать работу трудового коллектива.

ПК 4.4. Контролировать ход и оценивать результаты выполнения работ исполнителями.

ПК 4.5. Вести утвержденную учетно-отчетную документацию.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов по темам

Раздел 1. Введение в анализ

Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление.

1. Изучение и конспектирование темы «Непрерывность функции. Точки разрыва» - 1 час.
2. Выполнение тренировочных упражнений для подготовки к выполнению практической работы по теме «Вычисление пределов функции»- 1 час.
3. Нахождение производных высших порядков – выполнение заданий – 1 час.
4. Исследование функции и построение её графика – выполнение усложненных заданий – 2 часа
5. Оформление памятки «Способы вычисления неопределенных и определенных интегралов» - 2часа.

Тема 1.2. Ряды.

1. Составление памятки основных понятий и определений по теме: «Числовой ряд. Основные понятия» - 1час.

Тема 1.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

1. Создание памятки по решению дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами – 1 час.

Всего по разделу – 9 часов.

Раздел 2. Дискретная математика.

Тема 2.1. Основы дискретной математики.

1.Конспектирование и изучение темы: «Множества и операции над ними. Элементы математической логики» - 2 часа.

Всего по разделу – 2 часа.

Раздел 3. Теория вероятностей и математическая статистика.

Тема 3.1. Теория вероятностей.

1. Подготовка сообщения «История происхождения теории вероятностей», подготовка к выступлению - 1 час.
2. Оформление схемы в компьютерном виде «Сложение и умножение вероятностей» - 1 час.
3. Решение теста по теме: «Теория вероятностей» - 1 час.

Тема 3.2. Математическая статистика

1. Решение задач на закон распределения – 2 часа.
2. Подготовка к дифференцированному зачету – 3 часа.

Всего по разделу – 8 часов.

Всего по курсу – 19 часов.

Задания для самостоятельной внеаудиторной работы по учебной дисциплине «Математика»

Раздел 1. Введение в анализ

Тема 1.1. Дифференциальное и интегральное исчисление.

5. ***Изучение и конспектирование темы «Непрерывность функции. Точки разрыва» - 1 час.***

Теоретический материал для подготовки

Непрерывность функции. Точки разрыва и их классификация

Пусть функция *y=f(x)* определена в точке x_0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция *y=f(x)* называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Равенство означает выполнение трех условий:

1) функция *f(x)* определена в точке x_0 и ее окрестности;
2) функция *f(x)* имеет конечный предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Рассмотрим это определение с другой точки зрения.

Пусть дана функция *y=f(x),* определенная в некоторой области. Если выбрать некоторое начальное значение аргумента x_0 , то соответствующее значение функции $f(x_0)$ называется начальным. Если прибавить к начальному значению аргумента x_0 некоторое его приращение Δx, то получим значение аргумента $x_0+\Delta x$, которому соответствует значение функции $f(x_0+\Delta x)$.

$f(x_0+\Delta x)- f(x_0)$ называется *приращением функции и обозначается* Δy.

Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

Если $\lim \Delta x=0$ при $\Delta x \to 0$, $\lim\Delta y=0$ при $\Delta y \to 0$, то приращения Δx и Δy называются *бесконечно малыми.*

Таким образом:

Если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции , то функция y=f(x) называется непрерывной в точке x_0.

Пример: Показать, что функция $y= x^2$ непрерывна в произвольной точке x_0

Решение:

Возьмем приращение аргумента Δx т.е. рассмотрим точку $x_0+\Delta x$. Тогда

$y(x_0+\Delta x)=(x_0+\Delta x)^2$.

$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 - x_0^2$

$\lim\Delta y= \lim(2x_0\Delta x+(\Delta x)^2) = 2x_0 \lim \Delta x + \lim(\Delta x)^2 =0$ при $\Delta x \to 0$

т.е функция $y= x^2$ непрерывная функция на всей числовой оси.

Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва* этой функции. Если $x= x_0$ – точка разрыва функции y=f(x) , то в ней не выполняется хотя бы одно их 3-х условий первого определения непрерывности функции.

Все точки разрыва разделяются на точки разрыва первого и второго рода

Точка разрыва x_0 *называется точкой разрыва первого рода* функции y=f(x), если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim f(x) =A$ *и* $\lim f(x) = B$

При этом:

1. если А=В, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва,*
2. если А# В , то точка x_0 называется *точкой конечного разрыва.*

Величину | А- В | называют *скачком функции в точке разрыва первого рода.*

Точки устранимого разрыва и конечного скачка называются *точками разрыва 1–го рода*. Их отличительным признаком является существование конечных односторонних пределов.

Точка разрыва x_0 *называется точкой разрыва второго рода* функции y=f(x), если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует, или равен бесконечности

Пример 1:

Найти точки разрыва функции, если они существуют, б) найти односторонние пределы в точках разрыва и установить тип точек разрыва функции $f(x)=2x/(3+x)$

Решение:

Функция $f(x)=2x/(3+x)$ не определена в точке x=-3, значит это точка разрыва. Найдем односторонние пределы в этой точке. Сначала найдем односторонние пределы функции

$\lim 2x/(3+x) = -\infty$ *при* $x \to -3-0$

$\lim 2x/(3+x) = +\infty$, *при* $x \to -3+0$

Один (оба) из односторонних пределов равен бесконечности, значит точка x=-3 точка разрыва второго рода.

Пример 2: Найти точки разрыва функции и определить их тип $f(x)= (x^2 - 25)/(x-5)$

Решение:

Область определения функции $(-\infty,5)\cup(5, +\infty)$. Точка x = 5 – точка разрыва

Рассмотрим $\lim f(x)$ *при* $x \to 5-0$

$\lim (x-5)(x+5)/(x-5)= \lim (x+5)$ *при* $x \to 5$

$\lim (x+5) = 10$ *при* $x \to 5-0$

$\lim (x+5) = 10$ *при* $x \to 5+0$

Т.е. односторонние пределы равны и x = 5 – точка устранимого разрыва 1 рода

Пример 3: Исследовать функцию на непрерывность и определить вид точек разрыва $y= 1/x$

Решение:

Область определения функции $(-\infty,0)\cup(0, +\infty)$. Точка x = 5 – точка разрыва

Точка x = 0 – точка разрыва

Рассмотрим односторонние пределы

$\lim 1/x = -\infty$ *при* $x \to 0-0$

$\lim 1/x = +\infty$ *при* $x \to 0+0$

Т.е. x=0 – точка разрыва 2 рода

Пример 4. Исследовать функцию на непрерывность и определить вид точек разрыва $f(x) = x / (1+x^2)$

Решение:

Область определения функции $(-\infty,-1)\cup(-1, +\infty)$. Точка x = -1 – точка разрыва

Рассмотрим односторонние пределы

$\lim x/(1+x^2) = -\infty$ *при* $x = -1-0$

$\lim x/(1+x^2) = +\infty$ *при* $x = -1+0$

Т.е. x=-1– точка разрыва 2 рода.

Форма контроля: наличие конспекта.

6. ***Выполнение тренировочных упражнений для подготовки к выполнению практической работы по теме «Вычисление пределов функции»- 1 час.***

1. $\lim\limits_{x\to -2}\left(2x^3+5x^2-5\right).$

2. $\lim\limits_{x\to -1}\left(3x^4+2x+3\right).$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-3x+2}.$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-9}$

5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+3x+2};$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{3x^2-5x-2}$

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-12}{x^2-5x+6};$

8. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+7x+12}{x^2+3}.$

Образцы решения

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-3x^5+13\right).$

Решение: $\lim\limits_{x\to -2}\left(x^2-3x^5+13\right)=(-2)^2-3(-2)^5+13=4+3\cdot 32+13=113.$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+x^2}{x^2-1}.$

Решение: $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2-1\right)\neq 0;\quad \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x+x^2}{x^2-1}=\dfrac{2\cdot 3+3^2}{3^2-1}=\dfrac{6+9}{8}=\dfrac{15}{8}=1\dfrac{7}{8}.$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-8x+7}{x-1}.$

Решение: В данном случае теорема о пределе частного не применима, так как $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0.$ Числитель дроби разложим на множители и сократим дробь на $(x-1).$ Получим $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\cdot(x-7)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x-7)=-6.$

*Пример 4***.** Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-1}{2-x^4+3x^3}.$

Решение: Разделим числитель и знаменатель дроби на x^4:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5-\dfrac{1}{x^4}}{\dfrac{2}{x^4}-1+\dfrac{3}{x}}=\frac{5-0}{0-1+0}=-5.$$

Форма контроля: наличие выполненной работы.

7. ***Нахождение производных высших порядков – выполнение заданий – 1 час.***

1. Дана функция $y=x^5-7x^3+3$. Найти $y^{(4)}$.
2. Дана функция $y=\ln|x|$. Найти $y^{(5)}$.
3. Дана функция $y=e^{3x}$. Найти $y^{(6)}$.
4. Дана функция $y=3^x$. Найти $y^{(4)}$.

Теоретический материал и образцы решения

Производные высших порядков

Определение: Пусть *f′(x)* – производная от функции *f(x)*, тогда производная от функции *f′(x)* называется *второй производной* от функции *f(x)* и обозначается $f''(x)$.

Итак, $y''=(y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y''' (или $f'''(x)$).

Итак, $y'''=(y'')'$

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной (n-1) порядка***:*** $\boldsymbol{y^{(n)}=(y^{(n-1)})'}$ **.**

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков.*

Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках (y^V или $y^{(5)}$— производная пятого порядка).

Пример 1. Найдите вторую производную функции

$f(x)=\sin^3 x$

Решение:

Первая производная равна: $f'(x)=(\sin^3 x)'=3\sin^2 x\cos x,$

Находим вторую производную:

$f''(x)=(3\sin^2 x\cos x)'=3(2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x)=3\sin x(2\cos^2 x-\sin^2 x).$

Пример 2. Найти четвертую производную функции $f(x)=\sin\ x,$

$f'(x)=(\sin\ x)'=\cos x,\quad f''(x)=(\cos x)'=-\sin\ x,\quad f'''(x)=(-\sin\ x)'=-\cos x,$

$f^{(4)}(x)=(-\cos x)'=\sin\ x.$

Форма контроля: наличие выполненной работы.

8. ***Исследование функции и построение её графика – выполнение усложненных заданий – 2 часа***

Теоретический материал и образцы решения

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность.
4. Определить уравнения асимптот.
5. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума и значения функции в этих точках.
6. Найти интервалы выпуклости графика функции, точки перегиба.
7. Используя полученные сведения построить график функции.

Правило нахождения промежутков возрастания и убывания $y=f(x)$

1. Найти производную $f'(x)$ данной функции, а затем определить точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует (критические точки).
2. Исследовать знак $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f'(x)$. В тех интервалах, где $f'(x)>0$, функция возрастает, а в тех интервалах, где $f'(x)<0$, - убывает.

Пример 1 Найти интервалы монотонности функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

Р е ш е н и е

1. Находим производную и приравниваем её нулю:

$f'(x)=x^2-4x+3$; $x^2-4x+3=0$, откуда $x_1=1$ и $x_2=3$. Этими точками числовая прямая разбивается на интервалы (-∞; 1); (1; 3), (3;+∞), в каждом из которых производная сохраняет знак.

2. Определим знак производной $f'(x)=(x-1)(x-3)$ в этих интервалах.

Пусть x=0, тогда $f'(0)=(0-1)(0-3)>0$;

пусть x=2, тогда $f'(2)=(2-1)(2-3)<0$;

пусть x=4, тогда $f'(4)=(4-1)(4-3)>0$.

Отсюда следует, что данная функция в интервале (-∞; 1) возрастает, в интервале (1; 3) убывает и в интервале (3;+∞) снова возрастает.

Правило нахождения экстремумов функции с помощью производной

1.Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует.

2.Исследовать знак $f'(x)$ в некоторой окрестности каждой из критических точек. Если производная изменяет знак при переходе через такую точку, то функция имеет в этой точке экстремум, а если знак не изменяется, то функция в этой точке экстремума не имеет. При этом если переход через рассматриваемую точку слева на право знак $f'(x)$ изменяется с минуса на плюс, то в этой точке достигается минимум, а если плюса на минус –то максимум.

Пример 1. Найти экстремумы функции $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$

Решение

1. Найдём производную: $f'(x)=2x^2-2x-4$. Далее, имеем $2x^2-2x-4=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=2-$критические точки. Эти точки разбивают область определения функции на три интервала (-8; -1), (-1; 2),(2; $+\infty$).
2. Определим знаки производной в окрестностях критических точек. В интервале ($-\infty$; -1) возьмём произвольную точку x=-2; при x=-2 имеем $f'(-2)>0$. В интервале (-1; 2) возьмём x=0; при x=0 имеем $f'(0)=-4<0$. Так как производная при

переходе через точку x=-1 меняет знак с плюса на минус, то функция в точке x=-1 имеем максимум.

3. Вычислим максимальное значение функции $f(-1)=3\frac{1}{3}$.
4. Выше мы установили, что в интервале (-1; 2) производная $f'(x)<0$. Определением знак производной в интервале (2; $+\infty$); полагая x=3, находим $f'(3)>0$. Так как производная при переходе через точку x=2 имеет минимум.
5. Вычислим минимальное значение функции: $f(2)=-5\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти экстремумы функции $f(x)=(x-1)^5$.
Решение
1. Находим $f'(x)=5(x-1)^4$; далее имеем $5(x-1)^4=0$, откуда x=1. Эта критическая точка разбивает область определения функции на интервалы ($-\infty$; 1)и(1; ∞).

2. Если x=0, то $f'(0)=5>0$; если x=2, то $f'(2)=5>0$. Так как знак производной слева и справа от критической точки x=1 не изменяется , то в точке x=1 функция не имеет экстремума.

Пример 3. Исследовать по схеме функцию $y=x^3-3x^2$ и построить её график.

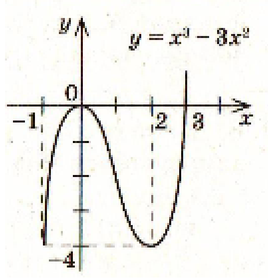
1. D(f)=R,
2. Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью Ox: $x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$, x=0 или x=3.
   Найдем ординаты точек пересечения графика с осью Oy: $y=0^3-0\cdot0^2=0$.
3. Определяем четность, нечетность и периодичность функции:

т.к. $f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2=-x^3-3x^2$, то функция ни четная, ни нечетная, функция непериодическая.

4. Находим промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции и составим таблицу.
   Найдем производную $f'(x)=(x^3-3x^2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$, найдем критические точки $f'(x)=0$, $3x(x-2)=0$, x=0 или x=2

x	($-\infty$;0)	0	(0;2)	2	(2; ∞)
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↑	0	↓	-4	↑
		max		min	

5. Используя полученные сведения, построим график функции $f(x)=x^3-3x^2$



Задание. Исследовать функцию и построить её график.

1) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, 2) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Форма контроля: наличие выполненной работы.

6. *Оформление памятки «Способы вычисления неопределенных и определенных интегралов» - 2часа.*

Теоретический материал и образцы решения

1) $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C;$

2) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$

3) $\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

4) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$

6) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\ x + C;$

7) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\ x + C;$

8) $\int e^x dx = e^x + C;$

9) $\int dx = x + C;$

10) $\int (kx+b)^n\,dx = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{(kx+b)^{n+1}}{n+1} + C;$

11) $\int a^{kx}\,dx = \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{a^{kx}}{\ln a} + C;$

12) $\int \cos kx\,dx = \dfrac{1}{k} \cdot \sin kx + C;$

13) $\int \sin kx\,dx = -\dfrac{1}{k} \cdot \cos kx + C;$

14) $\int \dfrac{dx}{kx+b} = \dfrac{1}{k}\ln|kx+b| + C;$

15) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 kx} = -\dfrac{1}{k} \cdot ctg\ kx + C;$

16) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 kx} = \dfrac{1}{k} \cdot tg\ kx + C;$

17) $\int e^{kx} dx = \dfrac{1}{k} \cdot e^{kx} + C.$

Таблица интегралов

Образцы решения

Пример 1. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\left(5x^2 - 6x + \frac{8}{x\sqrt[4]{x}}\right)dx = 5\int x^2 dx - 6\int x dx + 8\int x^{-5/4} dx = \frac{5}{3}x^3 - \frac{6}{2}x^2 + \frac{8}{-1/4}x^{-1/4} + C =$$
$$= \frac{5}{3}x^3 - 3x^2 - \frac{32}{\sqrt[4]{x}} + C$$

Пример 2. Вычислить неопределенный интеграл

$$\int\left(2\sin x - \frac{8}{x^2+4} + \frac{1}{x^2-4}\right)dx = 2\int \sin x dx - 8\int\frac{dx}{x^2+4} + \int\frac{dx}{x^2-4} = -2\cos x - 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Метод подстановки

1. Часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной.
2. Найти дифференциал от обеих частей замены.
3. Все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл).

4. Найти полученный табличный интеграл.
5. Сделать обратную замену.

*Пример 3***.** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}}$.

Произведем подстановку $5-3x=t,$ тогда $-3dx=dt,$ откуда $dx=-\frac{1}{3}dt.$ Далее получаем

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(5-3x)^2}} = \int \frac{-\frac{1}{3}dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\frac{1}{3}\int t^{-2/3}dt = -\frac{1}{3}\cdot\frac{t^{1/3}}{1/3} + C = -\sqrt[3]{t} + C = -\sqrt[3]{5-3x} + C.$$

Пример 4. Найти интеграл $\int (2+\cos x)^2 \cdot \sin x dx.$

Сначала положим $2+\cos x = t,$ тогда $-\sin x dx = dt,$ откуда $\sin x dx = -dt.$ Далее получаем

$$\int (2+\cos x)^2 \sin x dx = \int t^2(-dt) = -\int t^2 dt = -\frac{t^3}{3} + C = -\frac{1}{3}(2+\cos x)^3 + C.$$

*Пример 5***.** Найти интеграл $\int \frac{2xdx}{1+x^2}.$

Сначала положим $1+x^2=t,$ тогда $2xdx=dt.$ Далее получаем

$$\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|1+x^2\right| + C.$$

Вычисление определённого интеграла

Для вычисления определённого интеграла от функции f(x) на отрезке $[a;b]$ применяют формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

т.о. для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ надо найти соответствующий неопределённый интеграл, а затем вычислить разность значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Формулу Ньютона-Лейбница также записывают в виде:

$$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Пример 1. Вычислить $\int_1^2 x^2 dx$.

Найдём одну из первообразных для функции $f(x)=x^2$, $\int x^2dx = \frac{x^3}{3}+c$, т.е. $F(x)=\frac{x^3}{3}$

Тогда по формуле Ньютона-Лейбница $\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3-1^3) = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$

Решение записывают в виде: $\int_1^2 x^2dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{1}{3}(2^3-1) = \frac{7}{3}$

Пример 2. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx$

$$\int_0^{\pi/4} \sin 2x dx = \left.\frac{1}{2}\cos 2x\right|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}(\cos 2\cdot\frac{\pi}{4} - \cos 0) = = \frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0) = \frac{1}{2}(0-1) = -\frac{1}{2}$$

Для вычисления определённого интеграла методом по частям применяют формулу $\int_a^b u\cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\cdot du$

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\pi} x\sin 2x dx$

$$\int_0^{\pi} x\sin 2x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = x'dx = dx \\ dv = \sin 2x & v = \int \sin 2x = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} -$$

$$-\int_0^{\pi} -\frac{1}{2}\cos 2x dx = -\frac{x}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi} = (-\frac{\pi}{2}\cos 2\pi +$$

$$+\frac{0}{2}\cos 0) + \frac{1}{4}(\sin 2\pi - \sin 0) = -\frac{\pi}{2}\cdot 1 + 0 + \frac{1}{4}(0-0) = -\frac{\pi}{2}$$

Пример 4 . Вычислить $\int_1^{e} x\ln x dx$

$$\int_1^{e} x\ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = (\ln x)'dx = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e} -$$

$$-\int_1^{e} \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e} - \frac{1}{2}\int_1^{e} xdx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^{e} - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^{e} = (\frac{e^2}{2}\ln e -$$

$$-\frac{1}{2}\ln 1) - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = (\frac{e^2}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 0) - \frac{1}{4}(e^2 - 1) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{2e^2 - e^2 + 1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1).$$

Форма контроля: наличие памятки.

Тема 1.2. Ряды.

2. ***Составление памятки основных понятий и определений по теме: « Числовой ряд. Основные понятия» - 1час.***

Задание. Запишите основные понятия темы

1. Числовой ряд.
2. Частичная сумма числового ряда.
3. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды.
4. Гармонический и обобщенно гармонический числовой ряд.
5. Знакоположительный числовой ряд.
6. Знакочередующийся числовой ряд.
7. Знакопеременный числовой ряд.
8. Знакопеременный абсолютно сходящийся числовой ряд.
9. Знакопеременный условно сходящийся числовой ряд.

Форма контроля: наличие выполненной работы.

Теоретический материал

Пусть мы имеем числовую последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $a_k \in R, \quad k = 1, 2, \ldots$.

Приведем пример числовой последовательности: $6, 3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, -\frac{3}{16}, \ldots$.

Числовой ряд – это сумма членов числовой последовательности вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$.

В качестве примера числового ряда можно привести сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем *q = -0.5*:

$$8-4+2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}.$$

a_k называют общим членом числового ряда или *k–ым* членом ряда.

Для предыдущего примера общий член числового ряда имеет вид $(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$.

Частичная сумма числового ряда – это сумма вида $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, где *n* – некоторое натуральное число. S_n называют также *n-ой* частичной суммой числового ряда.

К примеру, четвертая частичная сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$ есть $S_4 = 8-4+2-1=5$.

Частичные суммы $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ образуют бесконечную последовательность частичных сумм числового ряда.

Для нашего ряда *n –ая* частичная сумма находится по формуле суммы первых *n* членов геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{a_1\cdot\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{8\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{16}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right)$$

, то есть, будем иметь следующую последовательность частичных сумм:

$$8, 4, 6, 5, \ldots, \frac{16}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\right), \ldots.$$

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется сходящимся, если существует конечный предел последовательности частичных сумм $S=\lim_{n\to+\infty}S_n$. Если предел последовательности частичных сумм числового ряда не существует или бесконечен, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется расходящимся.

Суммой сходящегося числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется предел последовательности его частичных сумм, то есть, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=\lim_{n\to+\infty}S_n=S$.

В нашем примере $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{16}{3}\cdot\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{16}{3}\cdot\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{16}{3}$,

следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k$ сходится, причем его сумма равна шестнадцати третьим: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-16)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^k = \frac{16}{3}$.

В качестве примера расходящегося ряда можно привести сумму геометрической прогрессии со знаменателем большем, чем единица: $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}+\ldots=\sum\limits_{k=1}^{\infty}2^{k-1}$.

n–ая частичная сумма определяется выражением $S_n = \frac{a_1\cdot\left(1-q^n\right)}{1-q} = \frac{1\cdot\left(1-2^n\right)}{1-2} = 2^n-1$, а предел частичных сумм бесконечен: $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(2^n-1\right) = +\infty$.

Еще одним примером расходящегося числового ряда является сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}5 = 5+5+\ldots$. В этом случае *n–ая* частичная сумма может быть вычислена как $S_n = 5n$. Предел частичных сумм бесконечен $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 5n = +\infty$.

Сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$ называется гармоническим числовым рядом.

Сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{n^s}+\ldots$, где s – некоторое действительное число, называется обобщенно гармоническим числовым рядом.

Приведенных определений достаточно для обоснования следующих очень часто используемых утверждений, рекомендуем их запомнить.

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ ЯВЛЯЕТСЯ РАСХОДЯЩИМСЯ.

Докажем расходимость гармонического ряда.

Предположим, что ряд сходится. Тогда существует конечный предел его частичных сумм. В этом случае можно записать $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = S$, что приводит нас к равенству $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_{2n}-S_n\right)=0$.

С другой стороны,

$$S_{2n}-S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}-$$

$$-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

Не вызывают сомнения следующие неравенства

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n},\quad \frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n},\ldots,\quad \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$$

. Таким образом,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

. Полученное неравенство $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$ указывает нам на то, что равенство $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(S_{2n} - S_n\right) = 0$ не может быть достигнуто, что противоречит нашему предположению о сходимости гармонического ряда.

Вывод: гармонический ряд расходится.

СУММА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ ВИДА

$$b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^n + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} b_1 q^{k-1}$$

СО ЗНАМЕНАТЕЛЕМ q ЯВЛЯЕТСЯ СХОДЯЩИМСЯ ЧИСЛОВЫМ РЯДОМ, ЕСЛИ $|q| < 1$, И РАСХОДЯЩИМСЯ РЯДОМ ПРИ $|q| \geq 1$.

Докажем это.

Мы знаем, что сумма первых n членов геометрической прогрессии находится по формуле

$$S_n = \frac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q-1}.$$

При $|q| < 1$справедливо

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q-1} = b_1 \cdot \left(\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{q-1} - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{q-1}\right) =$$

$$= b_1 \cdot \left(0 - \frac{1}{q-1}\right) = -\frac{b_1}{q-1}$$

что указывает на сходимость числового ряда.

При $q = 1$ имеем числовой ряд $b_1 + b_1 + b_1 + \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_1$. Его частичные суммы находятся как $S_n = b_1 \cdot n$, а предел частичных сумм бесконечен $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_1 \cdot n = \infty$, что указывает на расходимость ряда в этом случае.

Если $q = -1$, то числовой ряд примет вид $b_1 - b_1 + b_1 - \ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_1(-1)^{k+1}$. Частичные суммы принимают значение $S_n = b_1$для нечетных n, и $S_n = 0$для четных n. Из этого можно сделать вывод, что предел частичных сумм не существует и ряд расходится.

При $|q|>1$ справедливо

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1\cdot(q^n-1)}{q-1} = b_1\cdot\left(\lim_{n\to+\infty}\frac{q^n}{q-1} - \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{q-1}\right) =$$

$$= b_1\cdot\left(\infty - \frac{1}{q-1}\right) = \infty$$

что указывает на расходимость числового ряда.

ОБОБЩЕННО ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЯД $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ СХОДИТСЯ ПРИ *s > 1* И РАСХОДИТСЯ ПРИ $s\le 1$.

Доказательство.

Для *s = 1* получим гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$, а выше мы установили его расходимость.

При *s < 1* справедливо неравенство $\frac{1}{k^s}\ge\frac{1}{k}$ для всех натуральных *k*. В силу расходимости гармонического ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ можно утверждать, что последовательность его частичных сумм неограниченна (так как не существует конечного предела). Тогда последовательность частичных сумм числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ тем более неограниченна (каждый член этого ряда больше соответствующего члена гармонического ряда), следовательно, обобщенно гармонический ряд расходится при *s < 1*.

Осталось доказать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$ при *s > 1*.

Запишем разность $S_{2n-1}-S_{n-1}$:

$$S_{2n-1}-S_{n-1} = 1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^s}+\frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^s} -$$

$$-\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^s}\right) = \frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^s}$$

Очевидно, что $\frac{1}{(n+1)^s}<\frac{1}{n^s},\quad \frac{1}{(n+2)^s}<\frac{1}{n^s},\quad \ldots,\quad \frac{1}{(2n-1)^s}<\frac{1}{n^s}$, тогда

$$S_{2n-1}-S_{n-1} = \frac{1}{n^s}+\frac{1}{(n+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^s} <$$

$$< \frac{1}{n^s}+\frac{1}{n^s}+\ldots+\frac{1}{n^s} = \frac{n}{n^s} = \frac{1}{n^{s-1}}$$

Распишем полученное неравенство для *n = 2, 4, 8, 16, …*

$$n=2:\quad S_{2n-1}-S_{n-1}=S_3-S_1=\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}<\frac{1}{2^{s-1}}$$

$$n=4:\quad S_{2n-1}-S_{n-1}=S_7-S_3=\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}<\frac{1}{4^{s-1}}=\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^2}$$

$$n=8:\quad S_{2n-1}-S_{n-1}=S_{15}-S_7=\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\ldots+\frac{1}{15^s}<\frac{1}{8^{s-1}}=\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^3}$$

…

Используя эти результаты, с исходным числовым рядом можно провести следующие действия:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\ldots+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\ldots+\frac{1}{15^s}+\ldots=$$
$$=1+\left(S_3-S_1\right)+\left(S_7-S_3\right)+\left(S_{15}-S_7\right)+\ldots<$$
$$<1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^2}+\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^3}+\ldots$$

Выражение $1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^2}+\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^3}+\ldots$ представляет собой сумму геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $q=\frac{1}{2^{s-1}}$. Так как мы рассматриваем случай при *s > 1*, то $0<q<1$. Поэтому $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}<1+\frac{1}{2^{s-1}}+\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^2}+\frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^3}+\ldots=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$.

Таким образом, последовательность частичных сумм обобщенно гармонического ряда при *s > 1* является возрастающей и в тоже время ограниченной сверху значением $\frac{1}{1-\frac{1}{2^{s-1}}}$, следовательно, она имеет предел, что указывает на сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}$.

Доказательство завершено.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется знакоположительным, если все его члены положительны, то есть, $a_k>0,\quad k=1,2,\ldots$.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ называется знакочередующимся, если знаки его соседних членов различны. Знакочередующийся числовой ряд можно записать в виде $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\cdot a_k$ или $\sum_{k=1}^{\infty}b_k=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\cdot a_k$, где $a_k>0,\quad k=1,2,\ldots$.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется знакопеременным, если он содержит бесконечное множество как положительных, так и отрицательных членов.
Знакочередующийся числовой ряд является частным случаем знакопеременного ряда.
Ряды

$$6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16}+\ldots$$

$$6-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\ldots$$

$$6+3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16}+\ldots$$

являются знакоположительным, знакочередующимся и знакопеременным соответственно.
Для знакопеременного ряда существует понятие абсолютной и условной сходимости.

Знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин его членов, то есть, сходится знакоположительный числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$.

К примеру, числовые ряды $6-3+\frac{3}{2}-\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16},\ldots$ и $6+3-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{16},\ldots$ абсолютно сходятся, так как сходится ряд $6+3+\frac{3}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\frac{3}{16},\ldots$, являющийся суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Знакопеременный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ называется условно сходящимся, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$ расходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.
В качестве примера условно сходящегося числового ряда можно привести ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$. Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда, расходящийся, так как является гармоническим. В то же время, исходный ряд является сходящимся, что легко устанавливается с помощью признака Лейбница. Таким образом, числовой знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ условно сходящийся.

Тема 1.3. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

2. ***Создание памятки по решению дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами – 1 час.***

Теоретический материал и образцы решения

Алгоритм нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$.

1. Записываем характеристическое уравнение $k^2 + p \cdot k + q = 0$.
2. Находим корни характеристического уравнения k_1 и k_2.
3. В зависимости от значений корней характеристического уравнения записываем общее решение с постоянными коэффициентами в виде:

   1) $y = C_1 \cdot e^{k_1 x} + C_2 \cdot e^{k_2 x},\ k_1 \neq k_2,\ k_1, k_2 \in R.$
   2) $y = C_1 \cdot e^{kx} + C_2 \cdot e^{kx},\ k_1 = k_2 = k,\ k \in R.$
   3) $y = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cdot \cos \beta x + C_2 \cdot \sin \beta x),\ k_1 = \alpha + \beta i,\ k_2 = \alpha - \beta i.$

Рассмотрим примеры для каждого случая.

Пример1.

Найдите общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + 4y' + 4y = 0$.
Решение. Запишем характеристическое уравнение $k^2 + 4 \cdot k + 4 = 0$ и найдем его корни:

$k^2 + 4 \cdot k + 4 = 0,$
$(k+1)^2 = 0$
$k_1 = k_2 = k = -2$

Получили два совпадающих корня, следовательно, общее решение имеет вид

$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-2x}.$

Ответ: $y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^{-2x}.$

Пример 2.

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$.
Решение. Запишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$k^2 - 5k + 6 = 0,$
$D = 5^2 - 4 \cdot 6 = 1,$
$k_1 = \dfrac{5-1}{2} = 2, \quad k_2 = \dfrac{5+1}{2} = 3.$

Корни действительные и различные, поэтому, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}.$

Ответ: $y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{3x}$.

Пример 3.

Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' + 3y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $k^2 - k + 3 = 0$. Найдем его корни:

$D=1^2-4\cdot3=-11$,

$$k_1 = \frac{1+\sqrt{11}i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{11}}{2}i,$$

$$k_2 = \frac{1-\sqrt{11}i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{11}}{2}i,$$

$$\alpha = \frac{1}{2},\ \beta = \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Получили пару комплексно сопряженных корней характеристического уравнения, следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = e^{\frac{x}{2}} \cdot (C_1 \cdot \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \cdot \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x).$$

Ответ: $y = e^{\frac{x}{2}} \cdot (C_1 \cdot \cos\frac{\sqrt{11}}{2}x + C_2 \cdot \sin\frac{\sqrt{11}}{2}x)$.

Раздел 2. Дискретная математика.

Тема 2.1. Основы дискретной математики.

1.Конспектирование и изучение темы: «Множества и операции над ними. Элементы математической логики» - 2 часа.

1. Понятие множества. Обозначение элементов принадлежности (непринадлежности) множеству.
2. Понятие конечного и бесконечного множества.
3. Понятие подмножества, его обозначение. Собственное и несобственное подмножество.
4. Способы задания множества.
5. Объединение множеств, его обозначение.
6. Пересечение множеств, его обозначение.
7. Разность множеств, его обозначение.
8. Дополнение множеств, его обозначение.
9. Декартово произведение двух множеств.
10. Изображение операций над множествами.
11. Примеры решения типовых задач на множества.

Форма контроля: наличие конспекта.

Раздел 3. Теория вероятностей и математическая статистика.

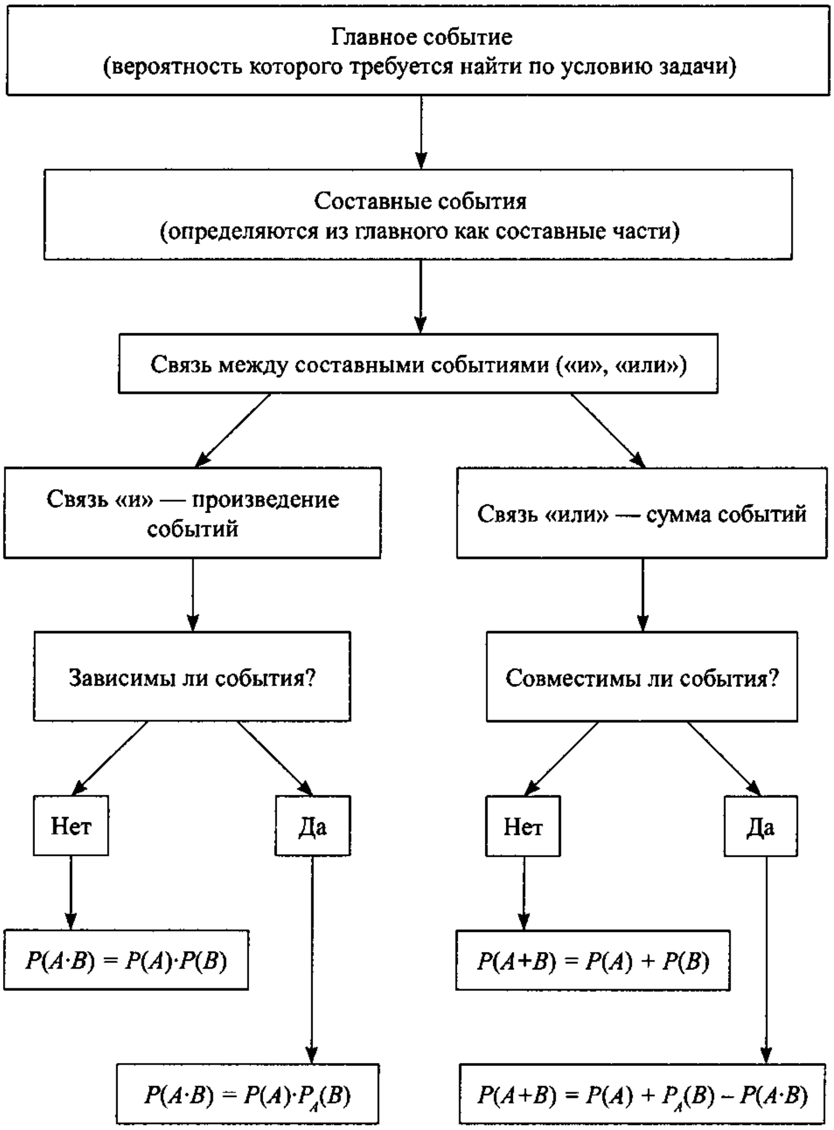
Тема 3.1. Теория вероятностей.

4. ***Подготовка сообщения «История происхождения теории вероятностей», подготовка к выступлению - 1 час.***

Форма контроля: наличие сообщения, выступление на уроке.

5. ***Оформление схемы в компьютерном виде «Сложение и умножение вероятностей» - 1 час.***

Форма контроля: наличие схемы.



6. ***Решение теста по теме: «Теория вероятностей» - 1 час.***

1	2	3	4	5	6	7	8

Тест по теме: «Теория вероятностей»

Задача 1.
На экзамене 40 вопросов, Коля не выучил 4 из них. Найдите вероятность того, что ему попадется выученный вопрос.

1	2	3	4
0,9	0,09	0,01	0,1

Задача 2.

В фирме такси в данный момент свободно 35 машин: 11 красных, 17 фиолетовых и 7 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшаяся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет зеленое такси.

1	2	3	4
0,02	0,2	11/35	0,1

Задача 3.

В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

1	2	3	4
0,71	0,07	3/7	7/3

Задача 4.

В случайном эксперименте симметричную монету бросают четырежды. Найдите вероятность того, что решка не выпадет ни разу.

1	2	3	4
0,62	0,625	0,0625	0,6

Задача 5.

Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 75 докладов — в первый день 27 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

1	2	3	4
3/27	27/75	30/75	0,32

Задача 6.

Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 участника из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России?

1	2	3	4
0,8	0,08	0,03	3/26

Задача 7.

В чемпионате мира учавствуют 20 команд. С помощью жребия их нужно разделить на пять групп по четыре команды в каждой. В ящике вперемешку лежат карточки с номерами групп:
1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5.
Капитаны команд тянут по одной карточке. Какова вероятность того, что команда Китая окажется в первой группе?

1	2	3	4
0,5	16/20	0,2	0,1

Задача 8.

На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет меньше 4?

1	2	3	4
1	0,9	0,01	0,4

Форма контроля: наличие выполненного теста.

Тема 3.2. Математическая статистика

1. ***Решение задач на закон распределения – 2 часа.***
2. В денежной лотерее из 100 билетов разыгрываются два выигрыша по 100 рублей, пять выигрышей по 50 рублей и пятнадцать выигрышей по 20 рублей. Найти закон распределения случайной величины X возможного выигрыша на один билет.
3. Написать закон распределения случайной величины X – отметки на экзамене для группы, в которой три отличника, 12 студентов имеют хорошие и отличные оценки, а 15 студентов имеют удовлетворительные оценки.
4. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд и многоугольник распределения числа попаданий в мишень.
5. Стрелок производит три выстрела по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,4. За каждое попадание стрелку засчитывается 5 очков. Построить ряд распределения числа выбитых очков.
6. Стрелок ведет стрельбу по мишени до первого попадания, имея боезапас 4 патрона. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Построить ряд распределения боезапаса, оставшегося неизрасходованным.

Форма контроля: наличие выполненной работы.

2. ***Подготовка к дифференцированному зачету – 3 часа.***

   Форма контроля: сдача зачета.

Методические указания по выполнению практических заданий

Для того чтобы выполнение практических заданий приносили максимальную пользу, необходимо помнить, что упражнение и решение ситуативных задач проводятся по материалу уроков и связаны, как правило, с детальным разбором отдельных вопросов темы. При самостоятельном решении поставленных задач нужно обосновывать каждый этап действий, исходя из теоретических положений курса. Если существует несколько путей решения проблемы (задачи), то нужно сравнить их и выбрать самый рациональный. Полезно до начала решения поставленных задач составить краткий план решения проблемы (задачи). Решение задач или примеров следует излагать подробно, нужно сопровождать комментариями, схемами, чертежами и рисунками, инструкциями по выполнению, если это необходимо

Следует помнить, что решение каждой учебной задачи должно доводиться до окончательного логического ответа, которого требует условие, и по возможности с выводом.

Критерии оценки выполненной работы:
«зачет» получают работы если:
- работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).
- работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).
- допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

«Зачет» не ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что студент не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Методические указания при подготовке сообщения

Сообщение– это форма работы, предназначенная по определению для устного ответа. Задание задаётся в ходе текущей учебной деятельности, для выступления устно на одном из семинарских или практических занятий. На подготовку отводится достаточно много времени (от недели и более). Поскольку сообщение изначально планируется как устное выступление, оно несколько отличается от тех видов работ, которые постоянно сдаются преподавателю и оцениваются им в письменном виде. Необходимость устного выступления предполагает соответствие некоторым дополнительным критериям. Если письменный текст должен быть правильно построен и оформлен, грамотно написан и иметь удовлетворительно раскрывающее тему содержание, то для устного выступления этого мало. Устное выступление, чтобы быть удачным, должно хорошо восприниматься на слух, то есть быть интересно для аудитории подано.

Текст сообщения должен быть построен в соответствии с регламентом предстоящего выступления. Преподаватель обычно заранее сообщает, сколько времени отводится докладчику. Уложиться в регламент очень важно так как этот момент даже выходит на первое место среди критериев оценки доклада. В противном случае вас прервут, вы не успеете сказать всего, что рассчитывали, причем, вероятно, самого главного, поскольку обычно в конце делаются выводы. От того качество выступления станет намного ниже и произведенное вами впечатление, как и полученная оценка, оставят желать лучшего.

Поэтому не меньшее внимание, чем написание самого сообщения, следует уделить его чтению. Оформив черновой вариант, попробуйте прочесть его самому себе или кому – то из взрослых и друзей вслух. При этом нужно читать не торопясь, но без лишней медлительности, стараясь приблизить темп речи к своему обычному темпу чтения вслух. Дело в том, что волнение во время чтения доклада перед аудиторией помешает вам всё время контролировать темп своей речи, и она всё равно самопроизвольно приобретет обычно свойственный темп, с той лишь разницей, что будет несколько более быстрой из – за волнения. Так что, если ваш текст окажется невозможно прочитать за установленное регламентом время, не стоит делать вывод, что читать нужно вдвое быстрее. Лучше просто пересмотреть доклад и постараться сократить в нём самое главное, избавиться от лишних эпитетов, вводных оборотов – там, где без них можно обойтись. Сделав первоначальное сокращение, перечитайте снова текст. Если опять не удалось уложиться в регламент, значит, нужно что – то радикально менять в структуре текста: сократить смысловую разбежку по вводной части (сделать так, чтобы она быстрее подводила к главному), сжать основную часть, в заключительной части убрать всё, кроме выводов, которые следует пронумеровать и изложить тезисно, сделав их максимально чёткими и краткими. Очень важен и другой момент. Не пытайтесь выступить экспромтом или полуэкспронтом, не отступайте в момент выступления слишком далеко от подготовительного текста.

Правила оформления

Формат – rtf, doc, (odt)

Текст сообщения должен быть подготовлен с использованием шрифта Times New Roman.

Объем сообщения не должен превышать 5 страниц А4 (210 мм x 297 мм, левое поле 21 мм, верхнее поле 20 мм, правое поле 21 мм, нижнее поле 20 мм), включая рисунки, таблицы, ссылки и аннотацию на английском языке.

Название сообщения – размер шрифта 16 пт, полужирный, заглавные буквы, выравнивание по центру, одинарный интервал.

Авторы – размер шрифта 14 пт, одинарный интервал. Инициалы авторов располагаются перед фамилиями и отделяются от фамилий пробелом.

Текст сообщения набирается шрифтом, размером 14 пт, с одинарным интервалом. Формулы верстаются с помощью Equation Editor (Math Type). Размер шрифта 14 пт.

Список литературы (12 пт) нумеруется, и номера ссылок приводятся в тексте тезиса в квадратных скобках. Инициалы автора в списке литературы должны следовать перед фамилией без пробелов между ними.

Методические указания по составлению схем (таблиц)

Схема (таблица) – это графические обозначения, содержащие основные понятия, правила работы, принципы, которые выдержаны эстетически правильно.
Для разработки схем (таблиц) по заданной теме нужно найти информацию с разных источников (сеть Internet, энциклопедии, практические пособия), изучить ее и составить схему в программе Word при помощи автофигур, а таблицу через Мастера Таблиц. Схема (таблица) должна содержать основные аспекты данной темы, правила, принципы работы. Схема (таблица) составляется индивидуально.
Работа должна быть представлена на бумаге формата А4 в печатном (компьютерном) или рукописном варианте, автофигуры должны быть эстетически правильно оформлены (вид, размер, цвет, расположение на листе). Выполненную работу сдать к указанному сроку.

Общие требования

1. Схема (таблица) состоит из нескольких тематических разделов связанных между собой логически.
2. Элементами работы могут быть:

информационные блоки, соединенные стрелками или выносками, текстовыми связками;
столбцы и строки, на пересечении которых в ячейка сконцентрирована информация, строки и столбцы обязательно имеют названия (характеристики);

3. Краткое пояснение по работе со схемой (таблицей).
4. При желании можно добавить поясняющую картинку или фотографию.

Методические указания по составлению памятки (справочного материала)

Памятка (алгоритм) — краткое нормативное, производственно-практическое или справочное издание (пособие), содержащее самые важные сведения, которыми надо руководствоваться, выполняя какую-либо операцию или осуществляя некоторую деятельность.

Для составления памятки-алгоритма по заданной теме нужно найти информацию с разных источников (сеть Internet, энциклопедии, практические пособия, учебная литература), изучить ее и выписать тезисы (основные мысли или основные действия). Памятка составляется индивидуально.
Работа должна быть представлена на бумаге в печатном (компьютерном) или рукописном варианте. Выполненную работу сдать к указанному сроку.

Методические указания по составлению конспекта

1. Определите цель составления конспекта.
2. Читая изучаемый материал в первый раз, подразделяйте его на основные смысловые части, выделяйте главные мысли, выводы.
3. Если составляется план-конспект, сформулируйте его пункты и определите, что именно следует включить в план-конспект для раскрытия каждого из них.
4. Наиболее существенные положения изучаемого материала (текста) последовательно и кратко излагайте своими словами или приводите в виде цитат.
5. В конспект включаются не только основные положения, но и обосновывающие их выводы, конкретные факты и примеры (без подробного описания).
6. Составляя конспект, можно отдельные слова и целые предложения писать сокращенно, выписывайте только ключевые слова, вместо цитирования делайте лишь ссылки на страницы конспектируемой работы, применяйте условные обозначения.
7. Чтобы форма конспекта как можно нагляднее отражала его содержание, располагайте абзацы «ступеньками» подобно пунктам и подпунктам плана, применяйте разнообразные способы подчеркивания, используйте карандаши и ручки разного цвета.
8. По возможности используйте графики, схемы, таблицы.

План-конспект

При создании такого конспекта сначала пишется план текста, далее на отдельные пункты плана «наращиваются» комментарии. Это могут быть цитаты или свободно изложенный текст.

Тематический конспект

Такой конспект является кратким изложением данной темы, раскрываемой по нескольким источникам.

Текстуальный конспект

Этот конспект представляет собой монтаж цитат.

Свободный конспект

Данный вид конспекта включает в себя и цитаты, и собственные формулировки.

Критерии оценивания работ

***Критерии оценивания составления схем (таблиц)*:**

"зачет" выставляется, если:
- графы схемы (таблицы) заполнены полностью, соответствуют изучаемому материалу, соблюдены требования к внешнему оформлению;
- основные требования к заполнению граф схемы (таблицы) соблюдены, но при этом допущены недочеты, например: имеются неточности в изложении материала, имеются упущения в оформлении;

"зачет" не выставляется, если:
- тема не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы, допущены грубейшие ошибки в оформление работы;
- схема (таблица)студентами не представлена.

***Критерии оценивания теста*:**

"зачет" выставляется, если:
- содержание теста соответствует заданной теме, выдержаны все требования к его оформлению;
- основные требования к оформлению теста соблюдены, но при этом допущены недочеты, например: неточно и некорректно составлены вопросы, имеются упущения в оформлении;

"зачет" не выставляется, если:
- вопросы или задания теста не соответствуют заданной теме, обнаруживается существенное непонимание проблемы;
- тест студентами не представлен.

***Критерии оценивания сообщения (доклада)*:**

"зачет" выставляется, если:
- содержание сообщения соответствует заданной теме, существует логическая связь изложенной информации;
- выдержаны основные требования к его оформлению, но при этом допущены недочеты;

"зачет" не выставляется, если:
- сообщение не соответствует заданной теме, обнаруживается существенное непонимание темы сообщения;
- сообщение студентами не представлено.

Критерии оценивания опорного конспекта:

"зачет" выставляется, если:
- содержание конспекта соответствует заданной теме, существует логическая связь изложенной информации;
- выдержаны основные требования к его оформлению, но при этом допущены недочеты;

"зачет" не выставляется, если:
- конспект не соответствует заданной теме, обнаруживается существенное непонимание темы конспекта;
- конспект студентами не представлен.

Критерии оценивания памятки (справочного материала):

"зачет" выставляется, если:
- составленная памятка-алгоритм, соответствует изучаемому материалу, соблюдены требования к составлению тезисов;
- основные требования к оформлению памятки соблюдены, но при этом допущены недочеты, например: имеются неточности в формулировке тезисов, пропущены некоторые действия, имеются упущения в оформлении;

"зачет" не выставляется, если:
- содержание памятки-алгоритма не соответствует изучаемой теме, обнаруживается существенное непонимание проблемы;
- памятка студентами не представлена.

Рекомендуемая литература

1. А.Г. Мордкович «Математика 10,11классы» учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) 6-ое издание, стереотипное, Москва 2010 год
2. А.Н.Колмагоров Москва Просвещение Алгебра и начала анализа 10-11 класс,2008г

Дополнительная литература

1. И.И. Валуцэ Математика для техникумов Москва «Наука» 1990
2. Математика для техникумов Алгебра и начала анализа под ред. Г.Н.Яковлева – Наука 1987год – 1 часть
3. Математика для техникумов Алгебра и начала анализа под ред. Г.Н.Яковлева – Наука 1987год – 2 часть
3. Математика для техникумов Геометрия под ред. Г.Н.Яковлева – Наука, 1989год
4. П.Т.Апанасов, М.И. Орлов «Сборник задач по математике», Москва «Высшая школа» 1987- учебное пособие для техникумов.

Интернет-ресурсы:

1) http://www.youtube.com/watch?v=TxFmRLiSpKo (Геометрический смысл производной)

2) http://www.youtube.com/watch?v=PbbyP8oEv-g (Лекция 1. Первообразная и неопределенный интеграл)

3) http://www.youtube.com/watch?v=2N-1jQ_T798&feature=channel (Лекция 5. Интегрирование по частям)

4) http://www.youtube.com/watch?v=3qGZQW36M8k&feature=channel (Лекция 2. Таблица основных интегралов)

5) http://www.youtube.com/watch?v=7lezxG4ATcA&feature=channel (Лекция 3. Непосредственное интегрирование)

6) http://www.youtube.com/watch?v=s-FDv3K1KHU&feature=channel (Лекция 4. Метод подстановки)

7) http://www.youtube.com/watch?v=dU_FMq_lss0&feature=channel (Лекция 12. Понятие определенного интеграла)

8) http://www.youtube.com/watch?v=wg_AIYBB0dg&feature=related (Гиперметод умножения)

9) http://www.youtube.com/watch?v=C_7clQcJP-c (Теория вероятности)

11) http://www.math.ru Газета "Математика" издательского дома "Первое сентября"
12) http://mat.1september.ru Математика в Открытом колледже
13) http://www.mathematics.ru Математика: Консультационный центр преподавателей и выпускников МГУ
14) http://school.msu.ruМатериалы по математике в Единой коллекции цифровых образовательных ресурсов
15) http://school_collection.edu.ru/collection/matematika/ Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО)
16)http://www.mccme.ru Образовательный математический сайт Exponenta.ru
17) http://www.exponenta.ru Общероссийский математический портал Math_Net.Ru
18) http://www.mathnet.ru Портал Allmath.ru – вся математика в одном месте
19) http://math.ournet.md Вся элементарная математика: Средняя математическая интернет – школа
20) http://www.bymath.net Геометрический портал
21) http://www.neive.by.ru Графики функций
22) http://comp_science.narod.ru Дискретная математика: алгоритмы (проект Computer Algorithm Tutor)
25) http://smekalka.pp.ru Математика онлайн: справочная информация в помощь студенту