БОУ СПО ВО «Грязовецкий политехнический техникум»

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии
дисциплин общеобразовательного цикла
Протокол № _1_____
от «26»августа 2015 г.
Председатель ЦК
________________ Е.В. Зиновьева

СОГЛАСОВАНО
Зам директора по ОМР
____________ Е.А. Ткаченко
«26» августа2015 г.

Методические рекомендации

по организации внеаудиторной самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине:

ЕН. 2 Элементы математической логики

09.02.02. Компьютерные сети

Преподаватель: Л. В. Белова

Грязовец
2015 г.

Пояснительная записка

Методические рекомендации для организации самостоятельной работы по дисциплине «Элементы математической логики» предназначены для обучающихся 2 курса по 09.02.02 «Компьютерные сети».

Основная задача образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Решение этой задачи вряд ли возможно только путем передачи знаний в готовом виде от преподавателя к обучающемуся. Необходимо перевести обучающегося из пассивного потребителя знаний в активного их творца, умеющего сформулировать проблему, проанализировать пути ее решения, найти оптимальный результат и доказать его правильность. Следует признать, что самостоятельная работа обучающихся является не просто важной формой образовательного процесса, а должна стать его основой.

В соответствии с учебным планом на самостоятельную работу обучающихся отводится 35 часов.

Самостоятельная работа обучающихся проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности обучающихся: самостоятельности, ответственности и организованности, творческой инициативы;
- формирования самостоятельности мышления, способности к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских навыков.

Критериями оценки результатов самостоятельной работы обучающихся являются:

- уровень усвоения обучающимся учебного материала;
- умение обучающегося использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность ключевых (общеучебных) компетенций;
- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень оформления работы.

При изучении дисциплины «Элементы математической логики» используются виды самостоятельной работы, направленной на:

формирование умений:

- решение логических задач и упражнений по образцу;
- составление таблиц истинности;
- использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета;

овладение знаниями:

- работа с текстами (учебника, первоисточника, дополнительной литературы);
- составление плана текста;
- конспектирование текста;
- выписки из текста;

- работа со словарями и справочниками;
- учебно-исследовательская работа;
- использование аудио- и видеозаписей, компьютерной техники и Интернета;

закрепление и систематизацию знаний:

- работа с конспектом лекций, учебным материалом (учебником,– первоисточником, дополнительной литературой, аудио- и видеозаписями) в т.ч. по составлению таблиц для систематизации учебного материала; составлению плана и тезисов ответа; ответов на контрольные вопросы;
- подготовка сообщений к выступлению на уроке;
- подготовка рефератов, докладов;
- составление библиографии, тематических кроссвордов.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Назначение рабочей тетради – организовать аудиторную и внеаудиторную самостоятельную работу обучающихся.

В структуру пособия входят следующие разделы:

Раздел 1 Множества

Раздел 2 Формулы логики

Раздел 3 Булевы функции

Раздел 4 Предикаты

Раздал 5 Элементы теории автоматов

Также включены задания внеаудиторной самостоятельной работы по дисциплине Элементы математической логики.

Раздел 1 Множества

Множество – это любая определённая совокупность объектов.

Класс – это множество, элементами которого являются множества.

Пример. Примеры множеств: Множество S страниц в книге; Множество R вещественных чисел.

Способы задания множеств:

– перечисление элементов: $M_k=\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$

– характеристический предикат: $M=\{x | P(x)\}$

– порождающая процедура: $M=\{x | x:=f\}$

Пример. $M_9=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – перечисление элементов.

Операции над множествами:

– объединение: $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$;

– пересечение: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$;

– разность: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$;

– симметрическая разность: $A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$.

Пример. Произвести над данными множествами все возможные операции. $A_3=\{1, 2, 3\}$ и $B_3=\{3, 4, 5\}$.

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $A \cap B = \{\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

<u>Задание</u>. Совершить над множествами следующие операции: объединение, пересечение, разность, симметричная разность.

a) $A_7=\{1,8,2,9,d,f,c\}$ $B_4=\{c,4,8,d\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

b) $A_7=\{e,w,x,t,g,yy,xz\}$ $B_4=\{x,y,z,t\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

c) $A_7=\{3,41,5,8,9,10,2\}$ $B_4=\{1,2,3,4\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

d) $A_7=\{3,4k,2a,5l,3w,1r,2\}$ $B_4=\{2a,7e,3,1r\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$.

e) $A_5=\{gg,h,t,e,w\}$ $B_5=\{p,t,uu,n,e\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}.$

f) $A_5=\{5,9,7,2,0\}$ $B_5=\{4,0,77,5,8\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}.$

g) $A_5=\{v,b,n,m,l\}$ $B_5=\{h,j,m,bn,i\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}.$

h) $A_5=\{0f,h,1y,q,5r\}$ $B_5=\{1y,0g,h,t,6\}$

$A \cup B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \cap B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \setminus B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$ $B \setminus A = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}$

$A \Delta B = \{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\}.$

Подмножество данного множества – это такое множество, каждый элемент которого является элементов другого множества, состоящая из элементов, обладающих некоторыми отличительными свойствами.

Пример. Найти все подмножества данного множества. {x, y, z}.

____

____

____

____

<u>Задание.</u> Для каждого множества B из задания 1, найти все подмножества.

a) $B_4=\{c,4,8,d\}$

____

____

____

b) $B_4=\{x,y,z,t\}$

____

____

____

c) $B_4=\{1,2,3,4\}$

____

____

____

d) $B_4=\{2a,7e,3,1r\}$

e) $B_5=\{p,t,uu,n,e\}$

f) $B_5=\{4,0,77,5,8\}$

g) $B_5=\{h,j,m,bn,i\}$

h) $B_5=\{1y,0g,h,t,6\}$

Раздел 2 Формулы логики

Тема 2.1 Высказывания

Таблица истинности – таблица, с помощью которой определяются истинностные функции сложных высказываний, зависящие от истинностных значений составляющих его простых высказываний.

Таблицы истинности основных логических функций:

НЕ

a	$\neg a$
0	1
1	0

ИЛИ

a	b	$a \vee b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Эквивалентность

a	b	$a \leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

И

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Импликация

a	b	$a \to b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример. Построить таблицу истинности следующей функции $F(x, y) = x \vee \overline{y \to \overline{x \vee \overline{y}}} \wedge \overline{x \vee y}$.

Расставляем последовательность действий: $F(x, y) = x \vee \overline{y \to \overline{x \vee \overline{y}}} \wedge \overline{x \vee y}$.

Строим таблицу, в которой число строк равно два в степени количества переменных исходной функции плюс один и число столбцов равно число действий плюс количество переменных, т.е. строк – 5, столбцов – 11.

Заполняем полученную таблицу следующим образом.

x	**y**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0	0									
0	1									
1	0									
1	1									

Задание. Постройте таблицы истинности для следующих функций.

1. $F(x,y)=\overline{(x+y)\cdot\overline{(\bar{x}+y)+(x+y\cdot\bar{x})}}$

x	y													

2. $F(a,b,c)=a+\overline{\bar{b}+\overline{c+\bar{a}}}+\overline{\overline{\bar{c}+\bar{a}+c}+b}$

a	b	c												

3. $F(a,b,c)=a\leftrightarrow(b+\bar{c})$

a	b	c												

4. $F(a,b,c)=\overline{(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c})+(a\cdot b+\bar{c}\cdot a)}$

a	b	c												

5. $F(x,y)=(x\to y)\cdot(\bar{x}+y)$

x	y													

6. $F(P,Q,R,S) = ((P\cdot Q)+R)\to\overline{S}$

P	Q	R	S											

7. $F(x,y) = (x\to y)\cdot\overline{(\bar{x}+y)}$

x	y													

8. $F(a,b,c) = \overline{a+\bar{b}}\leftrightarrow c$

a	b	c												

9. $F(P,Q,R,S) = ((P\leftrightarrow Q)\cdot R)\to(P+S)$

P	Q	R	S											
P	Q	R	S											

10. $F(x,y) = (\bar{x} + y)\cdot\overline{(x+y)} \to (x\cdot\bar{y})$

x	y													

11. $F(a,b,c) = (\overline{a+b} + \bar{c})\cdot(\bar{a} + \overline{\bar{b}+c})$

a	b	c												

11. $F(P,Q,R,S) = (P \to (Q\cdot R \to \bar{P})) + S\cdot P$

P	Q	R	S											

12. $F(x,y) = (\bar{x} + \bar{y})\cdot\overline{((x+\bar{y}) + (\bar{x}+y))}$

x	y													

13. $F(a,b,c) = \overline{(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}) + (a\cdot b + \bar{c}\cdot a)}$

a	b	c												

14. $F\left(P,Q,R,S\right)=(P+\overline{Q})\to(R+\overline{S})$

P	Q	R	S											

15. $F\left(x,y,z\right)=\overline{x+\overline{y}+z}\cdot\overline{y}\cdot\overline{\overline{x}+z}+x\cdot y$

x	y	z												

16. $F\left(x,y\right)=\overline{x+y}+\overline{\overline{x}\cdot y}\cdot x+\overline{y}+\overline{x}\cdot y$

x	y													

17. $F(x,y,z)=x+\overline{z+x}\cdot\bar{z}\cdot\overline{z+y}+\overline{x\cdot\bar{y}}$;

x	y	z												

18. $F(x,y,z)=z+\overline{y+x\cdot\bar{z}}\cdot\overline{\bar{x}+\overline{y+z}}\cdot\bar{y}$

x	y	z												

19. $F(x,y)=\overline{x+y}+\overline{x\cdot\overline{y\cdot x}}+\bar{y}+x\cdot y$

x	y													

20. $F(x,y)=\overline{x+\bar{y}+x\cdot\overline{y\cdot x}+\overline{y+x}\cdot\bar{y}}$

x	y													

Тема 2.2 Законы логики

Формулы и законы, с помощью которых возможно упрощение сложных высказываний:

1. Свойства, которые исходят из определений дизъюнкции, конъюнкции и отрицания:

$X+1=1$; $X+\overline{X}=1$; $X+0=X$; $X+X=X$; $X\cdot 1=X$; $X\cdot 0=0$; $X\cdot X=X$; $X+X+\ldots+X=X$; $X\cdot X\cdot\ldots\cdot X=X$; $X\cdot\overline{X}=0$.

2. Переместительный закон (закон коммутативности) для логического сложения и умножения:

$X + Y = Y + X; \quad X \cdot Y = Y \cdot X.$

3. Сочетательный закон (закон ассоциативности) для логического сложения и умножения:

$(X + Y) + Z = X + (Y + Z); \quad (X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z).$

4. Распределительный закон (закон дистрибутивности) для логического умножения по отношению к сложению: $X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z$; $X + Y \cdot Z = (X + Y) \cdot (X + Z)$.

5. Для многих алгебраических преобразований полезными являются тождества, относящиеся к двум и трём переменных:

а) $X \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = X$. б) $X + X \cdot Y = X$. в) $X \cdot (X + Y) = X$. г) $X \cdot (\overline{X} + Y) = X \cdot Y$. д) $(X + Y) \cdot (X + Z) = X + Y \cdot Z$.

6. К основным законам алгебры логики относятся законы инверсии для логического сложения и умножения (теоремы де Моргана): $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$; $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$.

7. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{X}} = X$.

8. Импликацию можно представить в виде $A \to B = \overline{A} + B$, эквивалентность – $A \leftrightarrow B = (\overline{A} + B) \cdot (A + \overline{B})$.

Пример. Упростить формулу $F(x, y) = x \vee \overline{y \to \overline{x \vee \overline{\overline{y}}}} \wedge \overline{x \vee y}$

$$F(x, y) = x \vee \overline{y \to \overline{x \vee \overline{\overline{y}}}} \wedge \overline{x \vee y} = \left| \begin{array}{l} \textit{запишем формулу} \\ \textit{в нестандартной} \\ \textit{форме} \end{array} \right| = x + \overline{y \to \overline{x + \overline{\overline{y}}}} \cdot \overline{x + y} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{упростим} \\ \textit{импликацию} \end{array} \right| = x + \overline{\overline{y} + \overline{x + \overline{\overline{y}}}} \cdot \overline{x + y} == \left| \begin{array}{l} \textit{использум закон} \\ \textit{де Моргана} \end{array} \right| = x + \left(\overline{\overline{y}} \cdot \overline{\overline{x + \overline{\overline{y}}}} \right) \cdot \left(\overline{x} \cdot \overline{y} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \textit{закон двойного} \\ \textit{отрицания} \end{array} \right| = x + \left(y \cdot \left(x + \overline{y} \right) \right) \cdot \overline{x} \cdot \overline{y} = \left| y \cdot \overline{y} = 0 \right| = x + 0 = x$$

<u>Задание.</u> С помощью законов логики упростите следующие выражения.

1. $F(x, y) = \overline{x + y} \cdot \overline{\overline{x + y \cdot x} + y}$

2. $F(x,y)=\overline{\overline{x+\overline{y}}\cdot\overline{\overline{x}+y}\cdot\overline{x+y}}$

3. $F(x,y)=\overline{x+y\cdot\overline{x+\overline{y}}}\cdot\overline{\overline{x}+y}$

4. $F(x,y)=\overline{x+\overline{y}\cdot\overline{x+y\cdot\overline{x}}+y}$

5. $F(x,y,z)=\overline{x+\overline{y}+z}\cdot\overline{y}\cdot\overline{\overline{x}+z}+x\cdot y$

6. $F(x,y)=\overline{x+y}+\overline{\overline{x}\cdot y}\cdot x+\overline{y}+\overline{x}\cdot y$

7. $F(x,y,z)=x+\overline{z+x}\cdot\overline{z}\cdot\overline{z+y}+\overline{x\cdot\overline{y}}$

8. $F(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1 + x_2} \cdot x_2 + x_1} \cdot \overline{x_1 + x_2} \cdot x_1$

9. $F(x, y) = \overline{x + y} + \overline{x \cdot \overline{\overline{y \cdot x}}} + \overline{y} + x \cdot y$

10. $F(x, y) = \overline{x + \overline{y} + x \cdot \overline{y \cdot x} + \overline{y + x} \cdot \overline{y}}$

11. $F(x_1, x_2) = (\overline{x_1} + x_2) \cdot \overline{(x_1 + x_2)} \rightarrow x_1 \cdot \overline{x_2}$

12. $F(x_1, x_2) = \overline{\overline{x_1 + x_2} \cdot x_2 + x_1} \cdot \overline{x_1 + x_2} \cdot x_1$

13. $F(x_1, x_2) = \overline{(\overline{x_1} \leftrightarrow x_2)} \cdot (x_1 + x_2)$

14. $F(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \leftrightarrow (x_1 + \overline{x_2})$

15. $F(x, y) = \overline{x + \overline{y} + x \cdot \overline{y \cdot x} + \overline{y + x} \cdot \overline{y}}$

16. $F(a, b, c) = \overline{a} + \overline{b + \overline{c}} + \overline{a + \overline{b}} + c$

17. $F(a, b, c) = \overline{\overline{a + b} + \overline{c}} + \overline{a} + \overline{b + c}$

18. $F(a,b,c)=a+\overline{b+\bar{c}}+\overline{\bar{a}+b}+\bar{c}$

19. $F(a,b,c)=\overline{a+b}\cdot c+b\cdot c+\bar{a}+\bar{b}$

20. $F(m,n)=m\cdot n+\bar{m}+\overline{m\cdot n}$

Тема 2.3 Применение логических формул

1. Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ).
Алгоритм построения:

Пример. Для функции $F(x,y)= x + \overline{y \cdot \overline{x + \overline{y}} + \overline{\overline{x \cdot y} + x}}$ построить СКНФ.

1. Составление таблицы истинности, для этого расставим действия:

$x+y\cdot x+\overline{y}+x\cdot y+x$

2. Построение таблицы истинности

x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

3. Составление СКНФ: ________________________________

Задание. Для данных функций построить совершенную конъюнктивную нормальную форму:

1. $F(x,y)=\overline{x+y}\cdot\overline{\overline{\overline{\overline{x}+\overline{y}\cdot x}\cdot y}+x\cdot y}$

x	y																

Составление СКНФ: ________________________________

2. $F(x,y)=x+y\cdot\overline{\overline{\overline{x+y}\cdot x}\cdot\overline{y+\overline{\overline{x}\cdot y}}}$

x	y																

Составление СКНФ: ________________________________

3. $F(x,y)=x+\overline{\overline{y\cdot x}+y}\cdot x\cdot\overline{\overline{\overline{y}+x}\cdot y}$

x	y																
x	y																

Составление СКНФ: ________________________________

4. $F(a,b,c)=a\cdot\overline{b+c}+\overline{\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c}\cdot a+\bar{b}+c$

a	b	c															

Составление СКНФ: ________________________________

5. $F(a,b,c)=a\cdot\overline{b\cdot\overline{\overline{c+a}\cdot b}+c}+\overline{\bar{a}\cdot b}+c$

a	b	c															

Составление СКНФ: ________________________________

2. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ).

Алгоритм построения:

____

____

____

____

____

____

____

Пример. Для функции $F(x,y)=x+\overline{y\cdot\overline{x+\bar{y}}+\overline{\overline{x\cdot y}+x}}$ построить СДНФ.

1. Составление таблицы истинности, для этого расставим действия:

$$x+\overline{y\cdot\overline{x+\bar{y}}+\overline{\overline{x\cdot y}+x}}$$

2. Построение таблицы истинности

x	y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

3. Составление СДНФ: ___________________________________

Задание. Для данных функций построить совершенную дизъюнктивную нормальную форму:

1. $F(x,y)=\overline{x\cdot y}\cdot\overline{\overline{\overline{\bar{x}+\bar{y}\cdot x}+y}+x\to y}$

x	y															

Составление СДНФ: ___________________________________

2. $F(x,y)=x+y+\cdot\overline{\overline{\overline{x\leftrightarrow y}\cdot x}\cdot\overline{y\to\overline{\bar{x}\cdot y}}}$

x	y															

Составление СДНФ: ___________________________________

3. $F(x,y)=x\cdot\overline{\overline{y\cdot x}+y}\cdot x+\overline{\overline{\bar{y}+x}+\bar{y}}$

x	y															

Составление СДНФ: ___________________________________

4. $F(a,b,c)=a\cdot\overline{b\to c}+\overline{a\cdot\bar{b}+c}\cdot\bar{a}+\bar{b}+c$

a	b	c														

Составление СДНФ: ________________________________

5. $F(a,b,c)=\overline{a}+\overline{b\cdot\overline{\overline{c\cdot a}\cdot b}+c}+\overline{\overline{a}\to b}+c$

a	b	c															

Составление СДНФ: ________________________________

Решение логических задач

Как решать логические задачи? Разнообразие логических задач очень велико. Способов их решения тоже немало. Но наибольшее распространение получили следующие три способа решения логических задач:

- средствами алгебры логики;
- табличный;
- с помощью рассуждений.

I. Решение логических задач средствами алгебры логики.

Обычно используется следующая схема решения:

Пример.

Трое друзей, болельщиков автогонок "Формула-1", спорили о результатах предстоящего этапа гонок.

— Вот увидишь, Шумахер не придет первым, — сказал Джон. Первым будет Хилл.

— Да нет же, победителем будет, как всегда, Шумахер, — воскликнул Ник. — А об Алези и говорить нечего, ему не быть первым.

Питер, к которому обратился Ник, возмутился:

— Хиллу не видать первого места, а вот Алези пилотирует самую мощную машину.

По завершении этапа гонок оказалось, что каждое из двух предположений двоих друзей подтвердилось, а оба предположения третьего из друзей оказались неверны. Кто выиграл этап гонки?

Решение.

Введем обозначения для логических высказываний:

Ш — победит Шумахер;

Х — победит Хилл;

А — победит Алези.

Реплика Ника "Алези пилотирует самую мощную машину" не содержит никакого утверждения о месте, которое займёт этот гонщик, поэтому в дальнейших рассуждениях не учитывается.

Зафиксируем высказывания каждого из друзей:

____

____

Учитывая то, что предположения двух друзей подтвердились, а предположения третьего неверны, запишем и упростим истинное высказывание

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

Высказывание истинно только при ____________________________________

II. Решение логических задач табличным способом.

При использовании этого способа условия, которые содержит задача, и результаты рассуждений фиксируются с помощью специально составленных таблиц.

Пример.

В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов: Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе. Известно, что:

1. Смит самый высокий;
2. играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте;
3. играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу;
4. когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их;
5. Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Решение.

Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив соответствующие клетки цифрами 0 и 1 в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун						
Смит						
Вессон						

Ответ:

III. Решение логических задач с помощью рассуждений.

Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

Пример.

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил:

"Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Решение.

Имеется три утверждения:

1. Вадим изучает китайский;
2. Сергей не изучает китайский;
3. Михаил не изучает арабский.

Ответ.

Задание. Решить логическую задачу, двумя любыми способами.

1. Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго. Известно, что:

- Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;
- парижанка не снимается в кино;
- та, кто живет в Риме, певица;
- Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

2. Пытаясь вспомнить победителей прошлогоднего турнира, пять бывших зрителей турнира заявили:

- Антон был вторым, а Борис - пятым.
- Виктор был вторым, а Денис - третьим.
- Григорий был первый, а Борис - третьим.
- Антон был третьим, а Евгений - шестым.
- Виктор был третьим, а Евгений - четвертым.

Впоследствии выяснилось, что каждый зритель ошибся в одном из двух своих высказываний. Каково было истинное распределение мест в турнире?

3. В школе, перешедшей на самообслуживание, четырем старшеклассникам: Андрееву, Костину, Савельеву и Давыдову поручили убрать 7-ой, 8-ой, 9-ый и 10-ый классы. При проверке оказалось, что 10-ый класс убран плохо. Не ушедшие домой ученики сообщили о следующем:

- Андреев: «Я убирал 9-ый класс, а Савельев — 7-ой».

- Костин: «Я убирал 9-ый класс, а Андреев — 8-ой».

- Савельев: «Я убирал 8-ой класс, а Костин - 10-ый».

Давыдов уже ушел домой. В дальнейшем выяснилось, что каждый ученик в одном из двух высказываний говорил правду, а во втором ложь. Какой класс убирал каждый ученик?

4. Пять школьников из пяти различных городов Брянской области прибыли для участия в областной олимпиаде по математике. На вопрос: «Откуда Вы?» каждый дал ответ:

- Иванов: «Я приехал из Клянцов, а Дмитриев из Новозыбкова».

- Сидоров: «Я приехал из Клянцов, а Петров из Трубчевска».

- Петров: «Я приехал из Клянцов ,а Дмитриев из Дятькова».

- Дмитриев: « Я приехал из Новозыбкова, а Ефимов из Жуковки».

- Ефимов: « «Я приехал из Жуковки, а Иванов из живет в Дятькове».

Откуда приехал каждый из школьников, если одно его утверждение верно, а другое ложно?

5. На соревнованиях по легкой атлетике Андрей, Борис, Сергей и Володя заняли первые четыре места. Но когда девочки стали вспоминать, как эти места распределились между победителями, то мнения разошлись.

- Даша сказала: "Андрей был первым, а Володя - вторым".

- Галя утверждала: "Андрей был вторым, а Борис - третьим".

- Лена считала: "Борис был четвертым, а Сергей - вторым".

Ася, которая была судьей на этих соревнованиях и хорошо помнила, как распределились места, сказала, что каждая из девочек сделала одно правильное и одно неправильное заявление. Кто из мальчиков какое место занял?

6. Кто из друзей (Иван, Петр, Алексей, Николай или Борис) коллекционирует марки, если известно, что:

- если Борис коллекционирует марки, то их коллекционируют Иван и Николай;
- если их коллекционирует Иван, то Петр тоже коллекционирует марки;
- из двух друзей (Петра и Алексея) коллекционирует марки только один;
- Алексей лишь в том случае коллекционирует марки, если их коллекционирует Николай;
- по крайней мере, Николай или Борис коллекционирует марки.

7. На вопрос, кто из трех абитуриентов А, В, С может работать на компьютере, был получен ответ: если может работать В, то может работать и С, но не верно, что если может работать А, то может работать и С. Кто из трех абитуриентов может работать на персональном компьютере?

8. На олимпиаде по информатике студенты A, B, C и D заняли первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три ответа: D – первый или B – второй; C – первый или A – четвертый; D – второй или B – третий. Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?

9. Кто из абитуриентов A, B, C и D играет, а кто не играет в шахматы, если известно следующее: если A или B играет, то C не играет; если B не играет, то играют C и B; C – играет. Решить задачу с помощью логических операций.

10.В деле об убийстве имеются двое подозреваемых: A и B. Допросили четверых свидетелей. Показания первого таковы: «A не виноват». Второй свидетель сказал: «B не виноват». Третий свидетель: «Из двух показаний по крайней мере одно истинно». Четвертый: «Показания третьего свидетеля ложны». Четвертый свидетель оказался прав. Кто же совершил преступление?

Раздел 3 Булевы функции

Тема 3.1 Функции алгебры логики

Булевы функции – это функции типа $f : E_2^n \to E_2$, *где* $E_2 = \{0{,}1\}$.

Булевы функции одной переменной:

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*0*	*1*	*0*	*1*

Функции ϕ_0, ϕ_3 – константы 0 и 1, т.е. функции с двумя несуществующими переменными.

Функция ϕ_1 – равна x_1. Функция ϕ_2 – равна $\overline{x_1}$.

Булевы функции двух переменных:

x_1	x_2	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{13}	ϕ_{14}	ϕ_{15}
0	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*	*0*	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*1*	*1*
1	*0*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*	*0*	*0*	*1*	*1*
1	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*	*0*	*1*

Функции ϕ_0, ϕ_{15} – константы 0 и 1, т.е. функции с двумя несуществующими переменными.

Функция ϕ_1 – конъюнкция (логическое умножение).

Функция ϕ_7 – дизъюнкция (логическое сложение).

Функция ϕ_6 – функция сложения по модулю 2. Обозначается $x_1 \oplus x_2$.

Функция ϕ_9 – эквивалентность. Функция ϕ_{13} – импликация.

Функция ϕ_8 – стрелка Пирса. Обозначается $x_1 \downarrow x_2$.

Функция ϕ_{14} – штрих Шеффера. Обозначается $x_1 \mid x_2$.

Функция ϕ_3 – равна x_1. Функция ϕ_{12} – равна $\overline{x_1}$.

Функция ϕ_5 – равна x_2. Функция ϕ_{10} – равна $\overline{x_2}$.

Пример. Какую функцию реализует формула: $F(x,y) = x \overset{9}{+} \overset{7}{\overline{y \overset{6}{\to} \overset{5}{\overline{x \overset{4}{+} \overset{3}{\overline{y}}}}}} \overset{8}{\cdot} \overset{2}{\overline{x \overset{1}{+} y}}$

x	y													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

Задание. Какую функцию реализует формула.

1. $F(x_1,x_2)=\overline{(x_1+x_2)}\to x_1\cdot x_2=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

2. $F(x_1,x_2)=(\overline{x_1}+\overline{x_2})\cdot\overline{(x_1+(\overline{x_1}\to x_2))}=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

3. $F(x_1,x_2)=\overline{\overline{x_1+x_2}\cdot x_2+x_1}\cdot\overline{x_1+x_2}\cdot x_1=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

4. $F(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\leftrightarrow(x_1+\overline{x_2})=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

5. $F(x_1,x_2)=(x_1+\overline{x_2})\to(x_2+\overline{x_1})=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

6. $F(x,y)=\overline{x+y}\cdot\overline{\overline{x+y\cdot x}+y}=$

x	y													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

7. $F(x,y)=\overline{\overline{x+\bar{y}}\cdot\overline{\bar{x}+y}\cdot\overline{x+y}}=$

x	y													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

8. $F(x_1,x_2)=x_1\to\overline{(\overline{x_2}+\overline{x_1\cdot(\overline{x_1}\to x_2)})}=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

9. $F(x_1,x_2)=x_1+x_2\cdot\overline{x_2+x_1}\cdot x_1+\overline{x_2\cdot x_1}=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

10. $F(x_1,x_2)=(x_1\leftrightarrow x_2)\cdot(x_1\to\overline{x_2})=$

x_1	x_2													
0	0													
0	1													
1	0													
1	1													

Данная формула реализует функцию: ___________________________

11. $F(x_1, x_2) = (\overline{x_1} + \overline{x_2}) \cdot \overline{((x_1 + \overline{x_2}) + (\overline{x_1} + x_2))} =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

12. $F(x_1, x_2) = (\overline{x_1} + x_2) \cdot \overline{(x_1 + x_2)} \to x_1 \cdot \overline{x_2} =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

13. $F(x, y) = \overline{x + y \cdot \overline{x + \overline{y}}} \cdot \overline{\overline{x} + y} =$

x	y												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

14. $F(x, y) = \overline{x + y} \cdot \overline{x} + \overline{y} \cdot x + y =$

x	y												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

15. $F(x_1, x_2) = \overline{x_1 + x_2} \cdot x_2 + x_1 \cdot \overline{\overline{x_1 + x_2} \cdot x_1} =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

16. $F(x_1, x_2) = \overline{(\overline{x_1} \leftrightarrow x_2)} \cdot (x_1 + x_2) =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

17. $F(x_1,x_2) = (x_1 + x_2)\cdot\overline{((\overline{x_1} + x_2) + (x_1 + x_2\cdot\overline{x_1}))} =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

18. $F(x_1,x_2) = x_1 + x_2\cdot\overline{\overline{x_2 + x_1}\cdot x_2 + x_2\cdot x_1} =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

19. $F(x_1,x_2) = \overline{x_1 + x_2\cdot\overline{x_2 + x_1}}\cdot x_1 + x_2\cdot x_1 =$

x_1	x_2												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

20. $F(x,y) = \overline{x + \overline{y}\cdot\overline{x + y\cdot\overline{x}} + y} =$

x	y												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

21. $F(x,y) = \left(\overline{x + \overline{y}}\right)\cdot\overline{\overline{x} + y}\cdot(x + y) =$

x	y												
0	0												
0	1												
1	0												
1	1												

Данная формула реализует функцию: ___________________________

Тема 3.2 Многочлен Жегалкина

Иван Иванович Жегалкин (22 июля (3 августа) 1869, Мценск, Российская империя — 28 марта 1947, Москва, СССР) — российский и советский математик и логик. Из его открытий наибольшую известность получил так называемый полином Жегалкина.

И. И. Жегалкин в 1889 году, окончив Орловскую гимназию, стал студентом математического отделения физико-математического факультета Московского университета. В 1893 году он окончил университет с дипломом 1-й степени и начал службу сразу в нескольких учреждениях: в Государственном банке и на вечерних курсах Общества распространения коммерческого образования. С 1900 года преподавал в реальном училище К. К. Мазинга. В 1902 году, выдержав магистерский экзамен, стал приват-доцентом университета; защита магистерской диссертации «Трансфинитные числа» состоялась только в 1908 году.

В 1911 году Жегалкин, будучи несогласным с политикой, проводимой Л. А. Кассо, бывшим тогда министром просвещения, ушёл с большой группой преподавателей из университета. До возвращения в университет в 1917 году, Жегалкин преподавал на Высших женских курсах. Здесь он, после открытия в 1906 году медицинского факультета, временно исполнял должность декана факультета. Будучи членом Московского математического общества, заведовал в нём библиотекой.

После возвращения в университет И. И. Жегалкин стал в 1923 году профессором математики, а в 1930 году назначен заведующим кафедрой математического анализа физико-механического факультета, преобразованного через 3 года в механико-математический факультет. Одновременно он заведовал кафедрой математики в Московском областном педагогическом институте.

По инициативе И. И. Жегалкина была создана группа математической логики, ставшая основой для образования в 1959 году кафедры математической логики, возглавленной С. А. Яновской.

Жегалкин представил алгебру логики как арифметику вычетов по модулю 2. Также ему принадлежит ряд работ о важных случаях, допускающих алгоритмическое решение проблемы разрешимости. Жегалкин награждён Орденом Трудового Красного Знамени. В своём письме М. Я. Выгодскому известный советский математик Николай Лузин, вспоминая студенческие годы, говорит, что из профессоров не боялся лишь Жегалкина.

Соотношения, выполняющиеся в алгебре Жегалкина:

1. $x \oplus y = y \oplus x$ 2. $x(y \oplus z) = xy \oplus xz$ 3. $x \oplus x = 0$ 4. $x \oplus 0 = x$ 5. $\bar{x} = x \oplus 1$
6. $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$

Пример. Упростить $\bar{x} \cdot y \vee y$

$$\bar{x} \cdot y \vee y = \left| \begin{matrix} \textit{используем} \\ \textit{многочлен} \\ \textit{Жегалкина} \end{matrix} \right| = (\bar{x} \cdot y) \cdot y \oplus (\bar{x} \cdot y) \oplus y = (\bar{x} \cdot y \cdot y) \oplus (\bar{x} \cdot y) \oplus y = (\bar{x} \cdot y) \oplus (\bar{x} \cdot y) \oplus y =$$

$$= (\bar{x} \cdot (y \oplus y)) \oplus y = |y \oplus y = 0| = (\bar{x} \cdot 0) \oplus y = |\bar{x} \cdot 0 = 0| = 0 \oplus y = y$$

<u>Задание.</u> Привести данное логическое выражение к виду алгебры Жегалкина.

1. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2} \vee \overline{x_1} \cdot x_3 =$

2. $F(x,y,z) = x \cdot y \vee \overline{z} \cdot x =$

3. $F(x,y,z) = (x \vee \overline{y}) \cdot (z \cdot y \vee x \cdot \overline{y}) =$

4. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \overline{x_3} \vee \overline{x_2} \cdot x_3 =$

5. $F(x,y,z) = (\overline{x} \cdot z) \vee (z \cdot y) \vee (x \cdot z) =$

6. $F(x,y,z) = (\overline{z} \vee x) \cdot (x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z) =$

7. $F(x,y,z)=(x\vee\overline{y})\cdot(\overline{y}\vee z)\cdot(\overline{z}\vee x)=$

8. $F(x_1,x_2)=x_1\cdot x_2\vee\overline{x_1}\cdot\overline{x_2}=$

9. $F(x,y)=\overline{x}\cdot\overline{y}\vee(x+y)=$

10. $F(x,y,z)=(x\vee\overline{y})\cdot(\overline{z}\cdot y\vee x\cdot y)=$

11. $F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee \overline{x_2} \cdot x_3 =$

12. $F(x, y, z) = x \cdot \overline{y} \vee (\overline{x} + x \cdot \overline{z}) =$

13. $F(x, y, z) = (y \vee \overline{z})(x \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot z) =$

14. $F(x, y, z) = (x \vee y) \cdot (y \vee z) \cdot (z \vee x) =$

15. $F(x, y) = x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y =$

16. $F(x,y,z)=(x\cdot y)\vee(z\cdot\overline{x})\vee(y\cdot\overline{z})=$

17. $F(x,y,z)=(x\cdot y\vee\overline{z})\cdot(x\cdot\overline{y}\vee y\cdot z)=$

18. $F(x,y,z)=(x\cdot\overline{y})\vee(y\cdot\overline{z})\vee(z\cdot x)=$

19. $F(x,y,z)=(x+\overline{y})\vee(x\cdot\overline{z}\vee y\cdot z)=$

20. $F(x,y,z)=(\overline{x}\vee y)\cdot(\overline{z}\cdot y\vee x\cdot\overline{y})=$

Тема 3.3 Булевы уравнения и их системы

Булевы уравнения

Способы решения:

1. Сведение к одному уравнению:

Пример. Решить уравнение $((x\to 1)\cdot x)\leftrightarrow 1=0$.

Решение.

2. Построение таблиц истинности

Пример. Решить уравнение $\left(\left(x \to 1\right) \cdot x\right) \leftrightarrow 1 = 0$

Решение.

X	1	2	3
0			
1			

3. Декомпозиция

Пример. Решить уравнение

$((x \to 1) \cdot x) \leftrightarrow 1 = 0$

Решение.

X=0

X=1

Задание. Решить уравнения всеми методами

1. $((x+0)\to 1)\cdot \bar{x}=1$

2. $((\overline{x\cdot 1})\leftrightarrow x)+0=0$

3. $x\cdot((\bar{x}\cdot 1)+0)\to 1=1$

4. $(\overline{x}+0)\cdot x \leftrightarrow 1 = 0$

5. $\overline{x}\cdot(1\cdot x)+0 \leftrightarrow ((1\cdot x)+\overline{x}) = 1$

6. $((x+1)\rightarrow 0)\cdot \overline{x} = 0$

7. $1+\left((0\cdot x)\leftrightarrow \overline{x}\right)=1$

8. $x\cdot\left((\overline{x}\cdot 0)+1\right)\rightarrow 1=0$

9. $\left(\overline{x\cdot 0}\leftrightarrow x\right)+0=1$

10. $\left((\overline{x}+1)\rightarrow 0\right)\leftrightarrow x=1$

Система булевых уравнений

Способы решения

1. Построение таблиц истинности

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot y = \bar{x} \to y \\ x \vee y = x \end{cases}$$

Х	У	1	2	3	4
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

2. Декомпозиция

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x \cdot y = \bar{x} \to y \\ x \vee y = x \end{cases}$$

Решение.

X=0

X=1

<u>Задание.</u> Решить системы уравнений всеми методами.

1. $\begin{cases} x = y \to 1 \\ 1 + x = x \cdot y \end{cases}$

2. $\begin{cases} x \cdot y = \overline{y} \\ (x+0) \cdot \overline{y} = 1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x \to y = \overline{x} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \overline{x} = y \to 1 \\ 1 + x = x \cdot \overline{y} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x \cdot \overline{y} = 0 \\ (x+1) \cdot \overline{y} = 1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \overline{x} \cdot y = 1 \\ x \to y = \overline{y} \end{cases}$

Раздел 4 Предикаты

Тема 4.1 Предикаты

Понятие предиката и операции над предикатами. n-Местным предикатом (или функцией-высказыванием от n переменных), определенным на множествах (областях) M_1, M_2, ..., M_n называют выражение, содержащее n (предметных) переменных x_1, x_2, ..., x_n, превращающееся в высказывание при подстановке вместо этих переменных конкретных элементов (предметов) из множеств M_1, M_2, ..., M_n соответственно. Для n-местного предиката будем использовать обозначение $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Высказывание будем считать 0-местным предикатом.

На предикаты естественным образом переносятся все операции (логические связки), которые мы проделывали над высказываниями. Например, дизъюнкцией n-местных предикатов $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, заданных над множествами M_1, M_2, ..., M_n называют новый n-местный предикат над этими множествами, обозначаемый $P(x_1, x_2, ..., x_n) \vee Q(x_1, x_2, ..., x_n)$, который обращается в ложное высказывание на тех и только тех значениях переменных из множеств M_1, M_2, ..., M_n, на которых в ложное высказывание обращаются оба данных предиката.

Задание. Для каждого из следующих высказываний найдите предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей:

а) «3 + 4 = 7»;

б) «Вера и Надежда — сестры»;

в) «Сегодня — вторник»;

г) «Город Саратов находится на берегу реки Волги»;

д) «sin 30° = 0,5»;

е) «А. С. Пушкин — великий русский поэт»;

ж) «32 + 42 = 52»;

з) «Река Индигирка впадает в озеро Байкал»;

163

и) «Если число делится на 3, то оно делится на 9»;

к) «Луна есть спутник Марса»;

л) «tg(π/4) = l».

Построив такой предикат, постарайтесь или точно указать его область истинности, или как-то ее обрисовать.

Решение. л) Можно указать три предиката, каждый из которых обращается в данное высказывание при соответствующей подстановке. Первый предикат одноместный: «tgx = 1» ($x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi n : n \in N\}$). Он превращается в данное высказывание при подстановке x = π/4. Получающееся высказывание истинно. Указанным значением не исчерпывается множество истинности построенного предиката. Как нетрудно установить, это множество следующее: $\{\pi/4 + \pi n : n \in N\}$. Второй предикат также одноместный: «tg(π/4) = y» ($y \in R$). Он превращается в данное высказывание при подстановке y = 1. Ясно, что этим значением и исчерпывается множество истинности этого предиката. Наконец можно построить третий предикат, двухместный: «tgx = y» ($x \in R \setminus \{\pi/2 + \pi n : n \in N\}, y \in R$). Он превращается в данное высказывание при подстановке x = π/4, y = 1. Его область истинности представляет собой множество упорядоченных пар, совокупность которых графически изображается в виде бесконечного семейства кривых, называемых тангенсоидами.

а) «3 + 4 = 7»

б) «Вера и Надежда — сестры»

в) «Сегодня — вторник»

г) «Город Саратов находится на берегу реки Волги»

д) «sin 30° = 0,5»

е) «А. С. Пушкин — великий русский поэт»

ж) «32 + 42 = 52»

з) «Река Индигирка впадает в озеро Байкал» ________________________________

____

____

____

____

и) «Если число делится на 3, то оно делится на 9» ________________________

____

____

____

____

к) «Луна есть спутник Марса» ____

____

____

____

____

Раздел 5 Элементы теории автоматов

Тема 5.2 Машина Тьюринга

Машина Тьюринга - это очень простое вычислительное устройство. Она состоит из ленты бесконечной длины, разделенной на ячейки, и головки, которая перемещается вдоль ленты и способна читать и записывать символы. Также у машины Тьюринга есть такая характеристика, как состояние, которое может выражаться целым числом от нуля до некоторой максимальной величины. В зависимости от состояния машина Тьюринга может выполнить одно из трех действий: записать символ в ячейку, передвинуться на одну ячейку вправо или влево и установить внутреннее состояние.

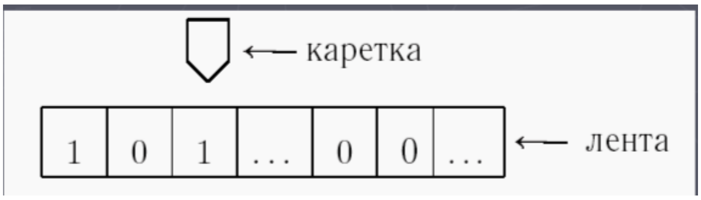
В 1947 г. Алан Тьюринг расширил определение, описав "универсальную машину Тьюринга". Позже для решения определенных классов задач была введена ее разновидность, которая позволяла выполнять не одну задачу, а несколько.

Свойства машины Тьюринга как алгоритма

Описание машины Тьюринга.

Каждая ячейка содержит ровно один из символов 0 или 1. Лента представляется конечной, но дополняемой в любой момент ячейками слева и справа для записи новых символов 0 или 1. Эта ситуация может возникнуть при сдвиге каретки влево или вправо за край ленты. Тогда наращивается новая клетка с содержимым 0. Это соглашение отражает идею о сколь угодно большой, но конечной памяти.

Если каретка, расположена над некоторой ячейкой с символом 0 (с символом 1), то говорим, что каретка обозревает символ 0 (обозревает символ 1)



Программы машины Тьюринга.

Выполнение инструкции.

Рассмотрим как выполняется инструкция *(i, a, x, y, z)* с номером *i*.

1) Машина смотрит обозреваемый кареткой символ. Если он равен 0, то исполняется команда *(i, 0, x, y, z)*, если обозреваемый символ равен 1, то исполняется команда *(i,1, x, y, z)*. Если команды с таким началом нет, то машина останавливается. <u>Это единственное условие остановки машины Тьюринга.</u>

2) Запись в обозреваемую ячейку величины *x*. Поэтому содержимое обозреваемой ячейки останется прежним или сменится на противоположное, например, 0 заменится на 1.

3) Сдвиг каретки на одну ячейку влево при *y*=*L* или вправо при *y*=*R*.

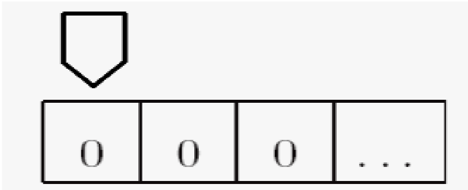
4) Переход к инструкции с номером *z*.

Выполнение инструкции с номером *i*, т. е. выполнение пунктов 1) – 4) считается одним тактом работы машины.

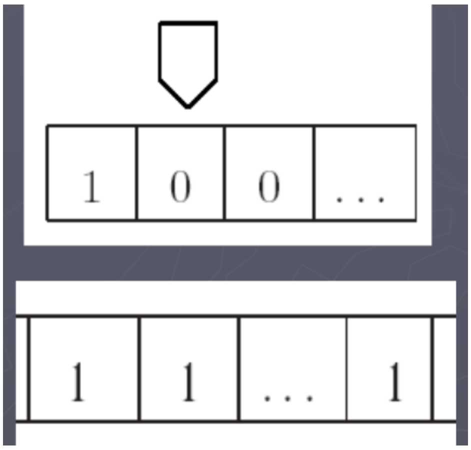
Пример работы программы.

Пусть дана машина Тьюринга с программой из одной инструкции *(0, 0, 1, R, 0)*.

Описать работу машины со следующими входными данными: на ленте во всех ячейках расположен символ 0.



Решение.



Другие варианты определения машины Тьюринга.

Рассмотрим другие способы определения машины Тьюринга. Пусть имеется некоторый алфавит $A=\{a_0, a_1, a_2, \dots , a_n\}$, который мы будем называть внешним алфавитом. Элементами алфавита A будем заполнять ячейки ленты, при этом символ a_0 будет служить для обозначения пустой ячейки.

Пусть имеется другой алфавит $Q=\{q_0, q_1, q_2, \dots , q_m\}$, который мы будем называть внутренним алфавитом. Этот алфавит мы будем использовать для обозначения состояний машины M, при этом символ q_1 будет служит для обозначения начального состояния, символ q_0 – для обозначения заключительного состояния.

Команды, из которых составляются программы, имеют один из трех видов:

1) $q_ia_j \to q_ka_l$, 2) $q_ia_j \to q_ka_l\ L$, 3) $q_ia_j \to q_ka_l\ R$, где $1 \le i \le m$, $0 \le j \le n$.

Легко видеть, что число различных команд равно $m(n+1)$. Команда с началом q_ia_j срабатывает, если машина M находится в состоянии q_i и каретка обозревает символ a_j. Поэтому в программе должна быть ровно одна команда с началом q_ia_j.

Действия при исполнении данных команд следующие:

Пример. Задаётся машина Тьюринга внешним алфавитом A = {a, b, c}, алфавитом внутренних состояний Q = {q_0, q_1, q_2, q_3} и программой:

1. q_1a → q_1Лa,
2. q_2a → q_3Пb,
3. q_3a → q_1Лa,
4. q_1b → q_2Лa,
5. q_2b → q_2Лb,
6. q_3b → q_3Пb,
7. q_1c → q_0a,
8. q_2c → q_2Лc,
9. q_3c → q_3Пc,
10. q_2Λ → q_2Лa.

Применим программу к слову bbcbb. Каретка находится в крайней правой позиции. Запишем программу в виде таблицы:

	q_1	**q_2**	**q_3**
a	q_1Лa	q_3Пb	q_1Лa
b	q_2Лa	q_2Лb	q_3Пb
c	q_0a	q_2Лc	q_3Пc

Решение.

bbcbq_1b →

Внеаудиторная самостоятельная работа

Задание 1. Записать законы упрощения множеств.

Вопросы для самоконтроля.

I. Множества – это ______________________________

II. Перечислите операции, которые можно совершать над множествами ___

Задание 2. Упросить предложенные множества, используя законы упрощения.

на удовлетворительно

$$A \cup \overline{B} \cap A \cup \overline{\overline{B \cap A} \cup B} =$$

на хорошо

$$A \cup \overline{B \cup \overline{C \cap A} \cap \overline{B}} \cup \overline{C \cap \overline{A \cup B}} =$$

$$A \cup \overline{B \cup \overline{A} \cap \overline{B \cup A}} \cup \overline{B \cap \overline{B \cap A}} =$$

<u>на отлично</u>

$$A \cup \overline{C \cap B} \cup \overline{A \cap \left(\overline{C} \cup B\right)} \cap \overline{\overline{A \cup C} \cup B} =$$

$$\overline{A \cup C \cap \overline{\overline{B} \cup \overline{A \cap C}}} \cup B \cap \overline{A \cup C} \cup B =$$

$$A \cup \overline{C \cap \overline{B \cup A} \cap \overline{C \cup \overline{B}}} \cap A \cup \overline{C \cup B} =$$

Вопросы для самоконтроля.

I. Для чего необходимо производить упрощение множеств?

II. Перечислите способы описания множеств.

Задание 3. Составить конспект на тему: «Аристотель – основоположник логики».

Вопросы для самоконтроля.

I. В чём заключается традиционная «формальная» логика Аристотеля.

II. Высказывание – это …

Задание 4. Упростить данные высказывания, используя законы логики.

на удовлетворительно

$$A+\overline{B}\cdot A+\overline{\overline{B\cdot A}+B}=$$

на хорошо

$$A+\overline{B+\overline{C\cdot A}\cdot\overline{B}}+\overline{C\cdot\overline{A+B}}=$$

$$A+\overline{B+\overline{A}\cdot\overline{B+A}}+\overline{B\cdot\overline{B\cdot A}}=$$

на отлично

$$A+\overline{C\cdot B}+\overline{A\cdot\left(\overline{C}+B\right)}\cdot\overline{\overline{A+C}+B}=$$

$$\overline{A+C\cdot\overline{\overline{B}+\overline{A\cdot C}}}+B\cdot\overline{A+C}+B=$$

$$A+\overline{C\cdot\overline{B+A}\cdot\overline{C+\overline{B}\cdot A}}+\overline{C+B}=$$

Вопросы для самоконтроля.

I. Логика – это ______________________________

II. Для чего необходимо производить упрощение высказываний? __________

Задание 5. Для данного высказывания построить СДНФ.

на удовлетворительно

$$F(x,y)=x+\overline{y\cdot\overline{\overline{x}\cdot y}+x}\cdot\overline{y+x}$$

x	y													

СДНФ: ____

на хорошо

$$F(x,y)=\overline{x+\overline{\overline{y}\cdot\overline{\overline{x}\cdot y}+\overline{x}}}\cdot\overline{y+x}$$

x	y													

СДНФ: ____

$$F(a,b,c)=\overline{\overline{\overline{a+b}\cdot\overline{c}}+a\cdot\overline{b}}+c$$

a	b	c												

СДНФ: ____

на отлично

$$F(a,b,c)=\overline{a+\overline{b}\cdot c}\cdot\overline{\overline{a+b}\cdot c}+\overline{b}+c$$

a	b	c												

СДНФ: ____

$$F(P,Q,R,S)=P\cdot\overline{Q+\overline{R\cdot\overline{S+P}}}\cdot S\to Q$$

P	Q	R	S											

P	Q	R	S											

СДНФ: ____

Вопросы для самоконтроля.

I. Таблица истинности – это ____

____

____

____

____

II. Опишите алгоритм построения таблиц истинности с помощью табличного редактора. ____

____

____

____

____

____

____

____

____

Задание 6. Для данного высказывания построить СКНФ.

<u>на удовлетворительно</u>

$$F(x,y) = x + \overline{y \cdot \overline{\overline{x} \cdot y}} + x \cdot \overline{y + x}$$

x	y													

СКНФ: ____

<u>на хорошо</u>

$$F(x,y)=\overline{x+\overline{\overline{y}\cdot\overline{\overline{x}\cdot y}+\overline{x}}}\cdot\overline{y+x}$$

x	y													

СКНФ: ____

$$F(a,b,c)=\overline{\overline{\overline{a+b}\cdot\overline{c}}+a\cdot\overline{b}}+c$$

a	b	c												

СКНФ: ____

на отлично

$$F(a,b,c)=\overline{a+\overline{b}\cdot c}\cdot\overline{\overline{a+b}\cdot c}+\overline{b}+c$$

a	b	c												

СКНФ: ____

$$F(P,Q,R,S)=P\cdot\overline{Q+\overline{R\cdot\overline{S+P}}}\cdot S\rightarrow Q$$

P	Q	R	S											

СКНФ: ____

Вопросы для самоконтроля.

I. Формула – это____

II. Опишите алгоритм построения таблиц истинности. ____________________

Задание 7. Решить данную логическую задачу.

на удовлетворительно

В одном доме живут три товарища - школьники Боря, Вася и Дима. Один из них играет в футбольной команде, другой пишет стихи, а третий лучше своих друзей играет в шахматы.

Известно, что: 1) Васин друг с огорчением сказал: «Вчера я не сумел реализовать пенальти»;

2) товарищ поэта сказал: « Дима! Написал бы ты стих и для нашей футбольной команды».

Назовите имена футболиста, поэта и шахматиста.

на хорошо

Министры иностранных дел России, США и Китая обсудили за закрытыми дверями проекты соглашения о полном разоружении, представленные каждой из стран. Отвечая затем на вопрос журналистов: "Чей именно проект был принят?", министры дали такие ответы:

Россия — "Проект не наш, проект не США";

США — "Проект не России, проект Китая";

Китай — "Проект не наш, проект России".

Один из них (самый откровенный) оба раза говорил правду; второй (самый скрытный) оба раза говорил неправду, третий (осторожный) один раз сказал правду, а другой раз — неправду.

Определите, представителями каких стран являются откровенный, скрытный и осторожный министры.

на отлично

Учитель математики, проверив олимпиадные работы учеников, сказал, что первые три места заняли Сергей, Василий и Алексей, причём Сергей занял не первое место, Василий - не второе, а Алексей - второе место.

Определите, кто какое место занял на олимпиаде, если оказалось, что учитель в двух высказываниях ошибся.

Вопросы для самоконтроля.

II. Обосновать выбор способа решения задачи.

III. Какой способ решения логических задач наиболее универсален.

Задание 8. Составить конспект на тему «Биография Дж. Буля».

1. Вопросы для самоконтроля.

I. Укажите в чём заключается вклад Дж. Буля в развитие математической логики. ______

II. Перечислите основные труды Дж. Буля в области математической логики. ______

Задание 9. Привести данные формулы логики к виду алгебры Жегалкина

на удовлетворительно

$F(x,y)=xy\vee(x+y)=$

на хорошо

$F(x,y,z)=x\cdot\bar{z}\vee\bar{x}\cdot y=$

на отлично

$F(x,y,z)=(x\vee y)\cdot(\bar{z}\cdot y\vee x\cdot\bar{y})$

Вопросы для самоконтроля.

I. Приведите краткое описание биографии Жегалкина.

II. Постройте таблицу истинности операции сложения по модулю 2.

x	y	$x\oplus y$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Задание 10. Решить данные системы булевых уравнений.

на удовлетворительно

$$\begin{cases} x=1 \\ x\cdot y=x\to y \end{cases}$$

на хорошо

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x\cdot y = x \leftrightarrow y \end{cases}$$

____

____

____

____

____

____

____

на отлично

$$\begin{cases} x\cdot(\bar{y}+x)=1 \\ y+\bar{x}=1 \end{cases}$$

____

____

____

____

____

____

____

Вопросы для самоконтроля.

I. Булева функция – это ____

____

____

II. Постройте таблицу истинности булевой функции одной переменной

x	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
0				
1				

Задание 11. Определить какие из выражений являются предикатами.

а) «x делится на 5» ($x \in N$) ___________________________

б) «Река x впадает в озеро Байкал» (x пробегает множество названий всевозможных рек) ___________________________

в) «$x^2 + 2x + 4$» ($x \in R$)___________________________

г) «$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$» ($x, y \in N$)___________________________

д) «x есть брат y» (x, y пробегают множество всех людей) ______________

е) «x и y лежат по разные стороны от z» (x, y пробегают множество всех точек, а z — всех прямых одной плоскости) ___________________________

ж)«ctg45°= 1» ___________________________

з) «x перпендикулярна y» (x, y пробегают множество всех прямых одной плоскости) ___________________________ и) «$x^2 + x - 6 = 0$» ($x \in R$)__________________________

к) «Для всех вещественных чисел x выполняется равенство $x^2 + x - 6 = 0$» __________________________

Вопросы для самоконтроля.

I. Высказывание – это ...

II. Предикат – это …

III. Описать отличие выражения и предиката.

Задание 12. Составить конспект на тему «Нормальный алгоритм Маркова».

1. Вопросы для самоконтроля.
I. Выделите основные этапы в биографии А.А. Маркова (младшего). ______

Задание 13. Составить конспект на тему: «Обращение функций в логике».