

# **Практические занятия по дисциплине ЕН 01 Элементы высшей математики**

**№ 1 Применение свойств определителей для их вычисления. Операции над матрицами.**

**Нахождение обратной матрицы.**

**Операции над матрицами. Вычисление определителей.**

**Задания для совместной работы.**

1. Найдите матрицу  $C = A + B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ .

2. Найдите матрицу  $C = A + B$ , если  $A = \quad$ ,  $B = \quad$ .

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Вычислите:  $2A + 3B - C$ , если  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$

4. Произведите умножение двух матриц а)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , б)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \square \quad$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Вычислите определитель второго порядка  $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ .

6. Вычислите определитель третьего порядка  $\quad$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

7. Запишите все миноры определителя  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ .

8. Найдите алгебраические дополнения  $A_{13}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{31}$  для

определителя  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ .

9. Разложите определитель  $\quad$  по:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

а) элементам первой строки;

б) элементам второго столбца.

10. Найдите обратную матрицу для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ .

## **Практические занятия: № 2 Решение систем уравнений.**

### **Задания для совместной работы.**

**1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.**

$$a) \begin{cases} 5x + 3y = 12, \\ 2x - y = 7. \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2. \end{cases} \quad v) \begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases} \quad r) \begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - 2y + z = 9, \\ x - 4y - 2z = 3. \end{cases}$$

**2. Решите систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Крамера**

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

**3. Используя метод Гаусса решите систему линейных уравнений**

$$a) \begin{cases} 3x + 2y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ x - 2y + 2z = 3. \end{cases} \quad b) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

### **Практическое занятие:**

**№ 3 Действия над векторами в координатной форме. Уравнения прямых первого порядка на плоскости.**

### **Вариант 1**

#### **№п/п Название операции      Формулы**

**1      Найти сумму векторов**

$$\vec{a}\{1; -2; 3\}, \vec{b}\{4; 0; -1\}$$

$$\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$$

**2      Найти разность векторов**

$$\vec{a}\{4; 1; -3\}, \vec{b}\{0; -5; 2\}$$

$$\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$$

**3      Найти произведение вектора на число**

$$\vec{a}\{-1; 3; 1\}, \delta - \text{число} \quad \delta = -3$$

$$\delta \vec{a} \{ \delta x; \delta y; \delta z \}$$

- 4** Вычислить координаты середины отрезка

**Точка А** (1; 2; -3) **Точка В** (-3; 4; -1) **Точка С**- середина отрезка АВ.  $C(x_c; y_c; z_c)$

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

- 5** Найти координаты вектора

**Точка А** (5; 0; -3). **Точка В** (-1; 4; -7).  
Находим координаты вектора  $\vec{AB}$ . Из координат конца вычислить координаты начала вектора

$$\vec{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

- 6** Найти длину вектора

$$\vec{a} \{5; 1; -1\}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- 7** Вычислить скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \{-2; 3; 7\}, \vec{b} \{-9; 0; 2\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

- 8** Найти косинус угла между векторами

$$\vec{a} \{2; 0; 1\}, \vec{b} \{-3; 1; 2\}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

- 9** При каких значениях  $m$  и  $n$  векторы коллинеарны?

$$\vec{a} \{m; 3; 1\}, \vec{b} \{1; n; 2\}$$

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$$

- 10 Проверьте перпендикулярность векторов**  $\vec{a}\{-4; 0; 1\}, \vec{b}\{2; 7; 8\}$
- $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$  - условие перпендикулярности векторов

## Вариант 2

№п/п	Название операции	Формулы
<b>1 Найти сумму векторов</b>	$\vec{a}\{2; -3; 4\}, \vec{b}\{-1; 2; 0\}$	$\vec{a} + \vec{b} \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$
<b>2 Найти разность векторов</b>	$\vec{a}\{4; -5; 7\}, \vec{b}\{3; -1; 2\}$	$\vec{a} - \vec{b} \{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$
<b>3 Найти пароизведение на число</b>	$\vec{a}\{-2; 4; 0\}$ , $\delta$ – число $\delta = -4$	$\delta \vec{a} [\delta \cdot x; \delta y; \delta z]$
<b>4 Вычислить координаты середины отрезка</b>	Точка А (-3; 1; 2) Точка В (2; -3; 1) Точка С - середина отрезка АВ. $C(x_c; y_c; z_c)$	$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$ $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$
<b>5 Найти координаты вектора</b>	Точка А (6; -3; 4). Точка В (1; -4; 7).	Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ . Из координат конца вычислить координаты начала вектора $\overrightarrow{AB} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

**6 Найти длину вектора**  $\vec{a}\{7; 2; -1\}$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**7 Вычислить скалярное произведение векторов**  $\vec{a}\{-3; 2; 9\}, \vec{b}\{-7; 0; 3\}$   
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

**8 Найти косинус угла между векторами**  $\vec{a}\{4; 1; 0\}, \vec{b}\{-5; 3; 1\}$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

**9 При каких значениях  $m$  и  $n$  векторы коллинеарны?**  $\vec{a}\{m; 5; 3\}, \vec{b}\{2; n; 4\}$   
 $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$

**10 Проверьте перпендикулярность векторов**  $\vec{a}\{0; -3; 2\}, \vec{b}\{9; 4; 6\}$

$x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$  - условие перпендикулярности векторов

### «Прямая на плоскости» Вариант 1

#### Задание 1

Треугольник задан вершинами  $A(4; -2)$ ,  $B(-4; 2)$ ,  $C(2; 5)$ . Выполнить чертеж.

- 1) Составить уравнения сторон треугольника;
- 2) Составить уравнение медианы  $CD$ ;
- 3) Найти угол наклона прямой  $BC$  к оси  $Ox$ .

#### Задание 2

Привести уравнение прямой к каноническому виду  $l: 3x + 7y - 42 = 0$

#### Задание 3

Прямая, проходящая через точку  $(-2; -1)$ , отсекает на оси  $Ox$  отрезок  $a =$

4. Составьте уравнение этой прямой (в общем виде).

**Задание 4**

Вычислить длину отрезка прямой  $l: 3x + 4y + 24 = 0$ , заключенного между осями координат.

**Задание 5**

На прямой  $l: 2x + y - 2 = 0$  найдите точку М, равноудаленную от точек  $A(0; 6)$ ,  $B(1; 5)$ .

**«Прямая на плоскости»**

**Вариант 2**

**Задание 1**

Треугольник задан вершинами  $A(0; -3)$ ,  $B(-4; 1)$ ,  $C(2; 3)$ . Выполнить чертеж.

- 1) Составить уравнения сторон треугольника;
- 2) Составить уравнение медианы  $CD$ ;
- 3) Найти угол наклона прямой  $AC$  к оси  $Ox$ .

**Задание 2**

Привести уравнение прямой к каноническому виду  $l: 5x - y + 20 = 0$

**Задание 3**

Точка, двигаясь прямолинейно, прошла через положения  $A(5; 2)$ ,  $B(-10; -1)$ . В каких точках она пересечет оси координат?

**Задание 4**

Вычислить длину отрезка прямой  $l: 4x + 3y + 12 = 0$ , заключенного между осями координат.

**Задание 5**

На прямой  $l: 2x - 3y - 3 = 0$  найдите точку М, равноудаленную от точек  $A(1; 2)$ ,  $B(4; 3)$ .

**Практическое занятие № 4 Решение задач, с использованием уравнений прямых первого и кривых второго порядка на плоскости и в пространстве.**

**Задания для совместной работы.**

1. Проверьте принадлежат ли точки  $A(3; 14)$ ,  $B(4; 13)$ ,  $C(-3; 0)$ ,  $D(0; 5)$  прямой  $7x - 3y + 21 = 0$ .
2. Постройте прямые: 1)  $x = 5$ ;  $x = -3$ ,  $x = 0$ ; 2)  $y = 4$ ,  $y = -2$ ,  $y = 0$ .

3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M(2; -4)$  и перпендикулярной вектору  $\vec{n} = (4; 2)$ .
4. Вычислите длину отрезка прямой  $3x + 4y - 24 = 0$ , заключенного между осями координат.
5. На прямой  $2x + y - 6 = 0$  найдите точку  $M$ , равноудаленную от точек  $A(3; 5)$  и  $B(2; 6)$ .
6. Вычислите углы наклона к оси  $Ox$  для прямых: 1)  $y = x$ ; 2)  $y = -x$ .
7. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат, если её угловой коэффициент: 1)  $k = 6$ ; 2)  $k = -2$ .
8. Найдите острый угол между прямыми  $5x - 2y - 16 = 0$  и  $3x + 4y - 12 = 0$ .
9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку  $M(-2; -4)$  параллельно прямой  $2x - 3y + 16 = 0$ .

**10.** Проверьте, перпендикулярны ли следующие прямые:

- 1)  $3x - 4y + 12 = 0$  и  $4x + 3y - 6 = 0$ ;
- 2)  $4x + 4y - 8 = 0$  и  $3x - 2y + 4 = 0$ .

**11.** Составьте уравнение окружности, проходящей через точки  $A(3; 1)$ ,  $B(-2; 6)$ ,  $C(-5; -2)$ .

**12.** Составьте уравнение эллипса, если две его вершины находятся в

точках  $B_1(-8; 0)$  и  $B_2(8; 0)$ , а фокусы - в точках  $F_1(0; -6)$  и  $F_2(0; 6)$ .

**13.** Составьте уравнение гиперболы, если её вершины находятся в точках  $A_1(-3; 0)$  и  $A_2(3; 0)$ , фокусы - в точках  $F_1(-5; 0)$  и  $F_2(5; 0)$ .

**14.** Составьте уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её директрисой служит прямая  $x = -3$ .

## Практическое занятие № 5 Раскрытие неопределённостей.

### Непрерывность функции и её разрывы.

Вычислить пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 + x - 5); \quad 2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 + 1).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} (2x^6 - 5x^2 + x - 4); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (3x^2 + x^2 - 8x + 10).$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} ((7x + 2) \cdot (4x - 3) \cdot (5x + 1)); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} ((x^2 - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x - 5)).$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3) \cdot (x - 2)}{x + 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{2x - 6}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{3x^2 + 2x}.$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - 2x^2}{5x^3 - 4x^2}; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x^2 - 9}; 2) \lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{4x^2 - 9}{2x + 3}.$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 25}; 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 8x + 4}{5x^2 - 11x + 8}; 2) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 9x + 20}.$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + x - 15}{3x^2 + 7x - 6}; 2) \lim_{x \rightarrow -\frac{2}{3}} \frac{3x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 8x + 4}.$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x - 6}{\sqrt{x+3} - 3}; 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}.$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{6}{x^2 - 9} - \frac{11}{x - 3} \right|; 2) \lim_{x \rightarrow -1} \left| \frac{3}{x^3 + 1} - \frac{1}{x + 1} \right|.$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 + 3x}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| 5 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} \right|.$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3 + 4x^2 + 2x}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x - 2}; 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 2x + 3}.$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 8}{2x - 2}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^3 + 1}{x^3 + 2x^2 + x}; 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - x^2}{x^3 + 3x^2 - 1}.$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + x^6}{x^3 + x^4}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 2x^2 - 1}{x^4 - 2x^3}.$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x} - x); 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x).$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+10} - \sqrt{x+20}); 2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2 + 5x} - \sqrt{2x^2 - 2x}).$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{3x^4}{x^2 + 3} - 3x^2 \right|; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| x - \frac{3x^2}{3x^2 + 7} \right|.$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{2x^3}{2x^2 - x} - x \right|; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{x^4}{x^2 - 2} - \frac{x^4}{x^2 + 2} \right|.$$

**Практические занятия:**

**№ 6 Исследование функции с помощью производной (касательная , нормаль, наибольшее и наименьшее значения)**

**Вариант – 1.**

1. Найти промежутки монотонности функции  $y = e^x - x$ .
2. Исследовать на экстремум функцию  $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ .
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$  на промежутке  $[2; 3]$ .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$ .

**Вариант – 2.**

1. Найти промежутки монотонности функции  $y = \frac{2x}{e^x}$ .
2. Исследовать на экстремум функцию  $y = x^3 - 3x^2 + 24x - 4$ .
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$  на промежутке  $[-1; 2]$ .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции  $y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100$ .

**Вариант – 3.**

1. Найти промежутки монотонности функции  $y = 2x e^x$ .
2. Исследовать на экстремум функцию  $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ .
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции  $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$  на промежутке  $[-2; 2]$ .
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции  $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$ .

**Практические занятия № 7 Полное исследование функции. Построение графиков.**

Исследуйте следующие функции и постройте их графики:

$$1) \ y = 2x^2 - 8x; \ 2) \ y = -3x^2 + 12x;$$

$$3) \ y = x^2 + 5x + 4; \ 4) \ y = -x^2 + 2x + 15;$$

$$5) \ y = x^3 - 3x; \ 6) \ y = 3x^3 - x;$$

$$7) \ y = -x^3 + x; \ 8) \ y = x^3 + 6x^2 + 9x + 8;$$

$$9) \ y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10; \ 10) \ y = \frac{1}{x^2 + 1};$$

$$11) \ y = \frac{x}{x^2 - 4}; \ 12) \ y = \frac{x^2 - 4}{x}.$$

**Практические занятия: № 8 Непосредственное интегрирование.  
Интегрирование по частям. Интегрирование  
рациональных, иррациональных, тригонометрических функций.**

1. Применяя метод интегрирования по частям, найдите следующие интегралы:

$$1) \int x \sin x dx;$$

$$2) \int x e^x dx;$$

$$3) \int \ln x dx;$$

$$4) \int x^2 \cos x dx;$$

$$5) \int x \ln^2 x dx;$$

$$6) \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$7) \int e^x \cos x dx;$$

$$8) \int (x - 3) \cos 5x dx;$$

$$9) \int \ln(3 - 7x) dx;$$

$$10) \int arctg 5x dx$$

;

$$11) \int ln(4+x^2) dx$$

;

$$12) \int (x^5 - x^3) ln 5x dx$$

.

2. Найдите интегралы от выражений, содержащих квадратный трехчлен:

$$1) \int \frac{dx}{3x^2 - 6x + 5};$$

$$2) \int \frac{(x+3)dx}{x^2 + 4x - 1};$$

$$3) \int \frac{(2x-1)dx}{x^2 - x};$$

$$4) \int \frac{x-1}{x^2 + 3x + 2} dx;$$

$$5) \int \frac{2x+9}{x^2 + 5x + 6} dx,$$

$$6) \int \frac{7x-5}{x^2 - x + 1} dx;$$

$$7) \int \frac{x+12}{x^2 - x - 6} dx;$$

$$8) \int \frac{5x+2}{x^2 + 2x - 8} dx.$$

3. Найдите интегралы от рациональных дробей:

$$1) \int \frac{x^2 - x}{x^2 - 6x^2 + 10} dx;$$

$$2) \int \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4} dx;$$

$$3) \int \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx;$$

$$4) \int \frac{x^3}{x^2 - 3x - 4} dx,$$

$$5) \int \frac{x^5}{x^3 - 8} dx;$$

$$6) \int \frac{2x^2 - 11}{x^2 - x - 6} dx;$$

$$7) \int \frac{x^4}{x^2 + 16} dx;$$

$$8) \int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx;$$

$$9) \int \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 6x + 5} dx.$$

**Практическое занятие: № 9 Определенный интеграл. Интегрирование по частям.**

Вычислить определенные интегралы:

$$1. \int_0^2 (5x^3 + 6) dx$$

$$2. \int_{-1}^1 (x^3 + 2x) dx$$

$$3. \int_0^{\pi/4} \frac{4 dx}{\cos^2 x}$$

$$4. \int_{-0,5}^{0,5} 3(1+z^2) dz$$

$$5. \int_3^6 \frac{dx}{x}$$

$$6. \int_0^1 \frac{3 dx}{x+3}$$

$$7. \int_4^5 (4-x)^3 dx$$

$$8. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos(2x - \frac{\pi}{6}) dx$$

$$9. \int_0^{\pi} \cos 4x dx$$

$$10. \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$11. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{9+x^2}$$

$$12. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx$$

$$13. \int_0^1 \ln(1+x^2) dx$$

$$14. \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$15. \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4-x \sin x}{x} dx$$

$$16. \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x}}$$

### Практическое занятие: №10      Вычисление несобственных интегралов.

$$\text{Пример 1} \quad \int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5} = (*)$$

$$\text{Пример 2} \quad \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = (*)$$

Пример 3

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^3}}$$

$$\text{Пример 4} \quad \int_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^4 x} = (*)$$

$$\text{Пример 5} \quad \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt[4]{1-x^4}} = (*)$$

$$\text{Пример 6} \quad - \int_{0.5}^1 \frac{dx}{x \ln^3 x} = (*)$$

## **Практические занятия:**

### **№ 11 Исследование функции нескольких переменных. Вычисление экстремумов функций.**

#### **Пример №1**

Исследовать на экстремум функцию  $z=4x^2-6xy-34x+5y^2+42y+7$ .

#### **Пример №2**

Исследовать на экстремум функцию  $z=x^3+3xy^2-15x-12y+1$ .

#### **Пример №3**

Исследовать на экстремум функцию  $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2+3$ .

## **Практические занятия**

### **№ 12 Абсолютная и условная сходимость.**

#### Пример 1

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n$

#### Пример 2

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

#### Пример 3

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}$

#### Пример 4

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot (-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

#### Пример 5

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n+5}$

### Пример 6

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{3n+1}{4n+7} \right)^{2n}$

### Пример 7

Исследовать ряд на сходимость  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

## **Практические занятия № 13 Степенной ряд.**

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ .

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{2} \right|^n$ .

Исследовать сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ .

## **Практические занятия № 14 Исследование числовых рядов на сходимость.**

Докажите сходимость числового ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3k \cdot \sqrt[3]{k}}$ .

Сходится ли числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sqrt{n}}{n^2}$ .

Докажите сходимость числового ряда  $1 - 6 + \frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \dots$  и вычислите его сумму.

Исследовать числовой ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{1+n}$  на сходимость.

Установить сходимость или расходимость ряда  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k - \frac{1}{2}}$ .

Исследуйте числовой ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 3k - 1}$  на сходимость.

## **Практические занятия № 15 Нахождение множества сходимости степенного ряда. Разложение функции в ряд Тейлора**

Разложить функцию  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2$  в ряд Тейлора по степеням  $(x-1)$

Разложить функцию  $f(x) = \frac{1}{x+3}$  в ряд Тейлора по степеням  $(x+1)$ . Найти область сходимости полученного ряда.

Разложить функцию  $y = \ln(1+2x)$  в ряд Тейлора по степеням  $(x-3)$ . Найти область сходимости полученного ряда.

## **Практические занятия № 16 Обыкновенные дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.**

Решить уравнение:  $(x^2+9)y' = 4xy(x^2+9)y' = 4xy$

Решить первого порядка с разделяющимися переменными:

$$\cos^2 x dy = \sin^2 y dx \cos 2x dy = \sin 2y dx$$

Найти общее решение с разделяющимися переменными:  $y'e^{x+y} = 1$

## **Практические занятия № 17 Однородные уравнения 1-го и 2-го порядка.**

Решить дифференциальное уравнение  $y'' + y' - 2y = 0$

Найти общее решение дифференциального уравнения, выполнить проверку

$$y'' - 4y' = 0$$

Решить дифференциальное уравнение  $y'' - 6y' + 9y = 0$

Найти общее решение дифференциального уравнения  $y'' + 2y' + y = 0$

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка  
 $y'' - 2y' + 10y = 0$

Решить однородное дифференциальное уравнение второго порядка  
 $y'' - 4y' + 5y = 0$

## **Практические занятия № 18 Решение однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.**

Найти общее решение однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$1) y'' - 4y' - 12y = 0;$$

$$2) y'' - 12y' + 36 = 0;$$

$$3) y'' + 2y' + 5y = 0.$$

**Практические занятия №19 Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с разделяющими переменными и однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами.**

Решить дифференциальное уравнение  $y''y + 9 = 0$  при заданных начальных условиях:  $y(1) = 1, y'(1) = 3$ .

Найти общее решение уравнения:  $xy'' + y' = \sqrt{x}$

**Практические занятия № 20-24 Действия над комплексными числами.**

**Как вариант:**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)  $z = 5i$ ;

б)  $z = 1+i$

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а)  $\frac{\cos \frac{\pi}{4}}{z=3} + i \sin \frac{\pi}{4}$ ;

б)  $\frac{\cos \frac{11\pi}{6}}{z=5} + i \sin \frac{11\pi}{6}$ .

3. Даны комплексные числа  $z_1 = 3(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$  и  $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ .

Найти: а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; в)  $z_2^4; 2\sqrt[3]{z_1}$ .

**Как вариант**

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)  $z = -6i$ ;

б)  $z = 1-i$

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а)  $\frac{\cos \frac{3\pi}{2}}{z=2,5} + i \sin \frac{3\pi}{2}$ ;

б)  $\frac{\cos \frac{15\pi}{4}}{z=8} + i \sin \frac{15\pi}{4}$ .

3. Даны комплексные числа  $z_1 = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$  и  $z_2 = 5 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$   
 Найти: а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; в)  $|z_1|^2$ .

### Как вариант

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)  $z = 3\sqrt{3}i$

б)  $z = 3$ .

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а)  $z = 10 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

б)  $z = 8 \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ .

3. Даны комплексные числа  $z_1 = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  и  $z_2 = 5 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$   
 Найти: а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; в)  $|z_1|^2$ .

### Как вариант

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а)  $z = 3\sqrt{3}i$

б)  $z = \sqrt{3}i$

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а)  $z = 4 \left( \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$

б)  $z = \sqrt{3}i$ .

3. Даны комплексные числа  $z_1 = \sqrt{3} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$  и  $z_2 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$   
 Найти: а)  $z_1 \cdot z_2$ ; б)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; в)  $|z_1|^2$ .

### Как вариант

#### Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме

1)  $(4 - 3i) + (-2 + i)$ ; 2)  $(0,4 - 0,3i) + (-0,9 + 1,7i)$ ; 3)  $(-0,4 - 2i) + (0,6 + 5i)$ ;

4)  $(0,4 - 0,3i) - (-0,9 + 1,7i)$ ; 5)  $(4 - 3i) + (-2 + i)$ ;

6)  $(4 - 3i) * (-2 + i)$ ; 7)  $(-0,4 - 2i) * (0,6 + 5i)$ ; 8)  $(-0,4 - 2i) * (0,6 + 5i)$ ;

**2 вариант**

- 1)  $(14 - 3i) + (-12 + 5i)$ ; 2)  $(0,4 - 0,3i) - (-0,9 + 1,7i)$ ; 3)  $(-0,4 - 2i)^* (0,6 + 5i)$ ;  
 4)  $(0,5 - 0,3i)^* (-9 + 1,7i)$ ; 5)  $(4 - 3i) : (-2 + i)$ ;  
 6)  $(7 - 2i)^* (-7 + i)$ ; 7)  $(-0,4 - 2i)^* (0,6 + 5i)$ ; 8)  $x(-0,4 - 2i) + (0,6 + 5i) = 0$ ;

**Как вариант**

<b>1 вариант</b>	<b>2 вариант</b>
<b>№ 1. Изобразите на плоскости заданные комплексные числа:</b>	
$z_1 = 4i$	$z_1 = -5i$
$z_2 = 3 + i$	$z_2 = 4 + i$
$z_3 = -4 + 3i$	$z_3 = -7 + 2i$
$z_4 = -2 - 5i$	$z_4 = -3 - 6i$
<b>№ 2. Произведите сложение и вычитание комплексных чисел:</b>	
a) $(3 + 5i) + (7 - 2i)$ . б) $(6 + 2i) + (5 + 3i)$ . в) $(-2 + 3i) - (7 - 2i)$ . г) $(5 - 4i) - (6 + 2i)$ .	$(3 - 2i) + (5 + i)$ . $(4 + 2i) + (-3 + 2i)$ . $(-5 + 2i) - (5 + 2i)$ . $(-3 - 5i) - (7 - 2i)$ .
<b>№ 3. Произведите умножение комплексных чисел:</b>	
a) $(2 + 3i)(5 - 7i)$ . б) $(6 + 4i)(5 + 2i)$ . в) $(3 - 2i)(7 - i)$ . г) $(-2 + 3i)(3 + 5i)$ .	$(1 - i)(1 + i)$ . $(3 + 2i)(1 + i)$ . $(6 + 4i)3i$ . $(2 - 3i)(-5i)$ .
<b>№ 4. Выполните деление комплексных чисел:</b>	
a) $(2 + 3i)/(5 - 7i)$ . б) $(6 + 4i)/(5 + 2i)$ . в) $(3 - 2i)/(7 - i)$ . г) $(-2 + 3i)/(3 + 5i)$ .	$(1 - i)/(1 + i)$ . $(3 + 2i)/(1 + i)$ . $(6 + 4i)/3i$ . $(2 - 3i)/(-5i)$ .
<b>№ 5. Выполните действия:</b>	
a) $(3 + 2i)(3 - 2i)$ . б) $(5 + i)(5 - i)$ . в) $(1 - 3i)(1 + 3i)$ .	a) $(7 - 6i)(7 + 6i)$ . б) $(4 + i)(4 - i)$ . в) $(1 - 5i)(1 + 5i)$ .
<b>№ 6. Решите уравнения:</b>	
a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ . б) $x^2 + 3x + 4 = 0$	a) $2,5x^2 + x + 1 = 0$ . б) $4x^2 - 20x + 26 = 0$ .

<p>№7. На рисунке показано графическое изображение комплексных чисел. Перерисуйте рисунок в тетрадь. Обозначьте комплексные числа как <math>z_1, z_2, z_3</math>. Запишите соответствующие аналитические формы.</p>	

Представить в алгебраической форме комплексные числа:

$$1. \ z = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad 4. \ z = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$2. \ z = e^{i\pi} \quad 5. \ z = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

$$3. \ z = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad 6. \ z = e^{i}$$

Перейти от алгебраической к тригонометрической и показательной формам:

$$4. \ z = -2 + 2\sqrt{3}i \quad 10. \ z = -3\sqrt{3} - 3i$$

$$5. \ z = -2\sqrt{3} + 2i \quad 11. \ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$6. \ z = 3 - 3\sqrt{3}i \quad 12. \ z = -3 - 4i$$

$$7. \ (1 - i\sqrt{3})^5;$$

$$8. \ \frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3};$$

$$9. \frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^3} ;$$

$$10. \frac{(1-i)^5}{(1-i\sqrt{3})^3} .$$

$$11. \sqrt[3]{-1}$$

$$12. \sqrt[3]{-1-i}$$

$$13. \sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$$

$$14. \sqrt{2-2i}$$

$$15. \sqrt[4]{2\sqrt{3}+2i}$$

$$16. \sqrt[3]{-9}$$

$$17. \sqrt[3]{1+i}$$

$$18. \sqrt[4]{-8+i8\sqrt{3}}$$

### Практические занятия

#### № 25 Итоговая практическая работа в форме подготовки к экзамену.

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Найти производную функции  $y = \ln 3x$ .

Найти:  $f'(x)$ , если  $f(x) = 2\ln x - 3x$ .

Найти скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ , если  $\overrightarrow{AB} \{3; -1; 4\}$ ,  
 $\overrightarrow{CD} \{-1; 2; 1\}$

Составить уравнение окружности с центром в точке  $(5; -7)$  и проходящей через точку  $(2; -3)$ .

Найдите первые четыре члена ряда по его заданному общему члену:  $u_n =$

$$\frac{1}{(3n-1)(2n+1)}.$$

Найти:  $z_1 \cdot z_2$ , если  $z_1 = 2(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)$ ,  $z_2 = 3(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$ .

Найти произведение матрицы на число:  $(-2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Вычислить:

$$(2 - 3j) \cdot (5 + j).$$

Найти:  $(5 - 3j) \cdot 2j$ .

Найти матрицу  $C = A + B$ , если  $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ .

Найти модуль и аргумент комплексного числа  $z = -1$ .

Вычислить предел:  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x - 2)$ .

Найти значение выражения:  $(2 - 3j) + (5 + 6j) + (-3 - 4j)$ .

Записать в тригонометрической форме комплексное число

$$z = 1 + j.$$

Составить уравнение гиперболы, если ее вершины находятся в точках  $A_1(-3; 0)$  и  $A_2(3; 0)$ , а фокусы – в точках  $F_1(-5; 0)$  и  $F_2(5; 0)$ .