БПОУ ВО «Грязовецкий политехнический техникум»

РАССМОТРЕНО
на заседании цикловой комиссии
общеобразовательных, общегуманитарных
и социально-экономических дисциплин
Протокол № _1__
от «__30_»___августа__________ 2018 г.
Председатель ЦК
________________ Е.В. Зиновьева

СОГЛАСОВАНО
Зам директора по ОМР
__________ Е.А. Ткаченко
«__30_» ___августа_2018 г.

Практические работы

по общеобразовательной учебной дисциплине
ОУД.04. «Математика»

ГРЯЗОВЕЦ,
2018

Практические работы

Пояснительная записка

Практическое занятие - это форма организации учебного процесса, предполагающая выполнение студентами по заданию и под руководством преподавателя одной или нескольких практических работ.

Дидактическая цель практических работ - формирование у студентов профессиональных умений, а также практических умений, необходимых для изучения последующих учебных дисциплин, а также подготовка к применению этих умений в профессиональной деятельности.

Так, на практических занятиях по математике у студентов формируется умение решать задачи, которое в дальнейшем должно быть использовано для решения профессиональных задач по специальным дисциплинам. В ходе выполнения практических работ студенты овладевают умениями пользоваться информационными источниками, работать с нормативными документами и инструктивными материалами, справочниками, выполнять чертежи, схемы, таблицы, решать разного рода задачи, делать вычисления.

Задачи, которые решаются в ходе практических занятий по дисциплине:

1) расширение и закрепление теоретических знаний, полученных в ходе лекционных занятий;

2) формирование у студентов практических умений и навыков, необходимых для успешного решения задач;

3) развитие у студентов потребности в самообразовании и совершенствовании знаний и умений в процессе изучения математики;

4) формирование творческого отношения и исследовательского подхода в процессе изучения дисциплины;

5) формирование профессионально-значимых качеств будущего специалиста и навыков приложения полученных знаний в профессиональной сфере.

Критерии оценки выполненной работы:

Ответ оценивается отметкой «5», если:

работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможны некоторые неточности, описки, которая не является следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится в следующих случаях:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущены одна ошибка, или есть два – три недочёта в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работ не являлись специальным объектом проверки).

Отметка «3» ставится, если:

допущено не более двух ошибок или более двух – трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но студент обладает обязательными умениями по проверяемой теме.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что студент не обладает обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Преподаватель может повысить отметку за оригинальный ответ на вопрос или оригинальное решение задачи, которые свидетельствуют о высоком математическом развитии студента; за решение более сложной задачи или ответ на более сложный вопрос, предложенные студенту дополнительно после выполнения им каких-либо других заданий.

Практическая работа №1

Тема: **Радианная мера угла.**

Цели:

- познакомиться с основными измерениями угла, понятием радиана, основными формулами выражения углов в градусах и радианах;
- научиться использовать формулы преобразования углов в градусах и радианах.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта

Ход работы:

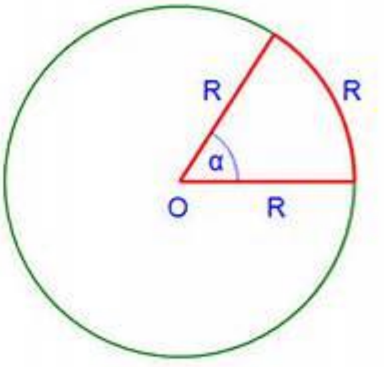
1.Познакомьтесь с основными вопросами темы.

Как известно, углы измеряются в градусах, минутах, секундах. Эти измерения связаны между собой соотношениями

$1^0 = 60'$ $\qquad$ $1 \;= 60''$

$1' = \left(\dfrac{1}{60}\right)^0$ $\qquad$ $1'' = \left(\dfrac{1}{60}\right)'$

Кроме указанных, используется также единица измерения углов, называемая *радианом.* Углом в один радиан называют центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса окружности. Угол, равный 1 рад изображен на рисунке.



Радианная мера угла, т.е. величина угла, выраженная в радианах, не зависит от длины радиуса. Это следует из того, что фигуры, ограниченные углом и дугой окружности с центром в вершине этого угла, подобны между собой.

Установим связь между радианными и градусными измерениями углов.

Углу, равному 180^0, соответствует полуокружность, т.е. дуга, длина *l* которой равна πR: $l=\pi R$.

Чтобы найти радианную меру этого угла, надо длину дуги *l* разделить на длину радиуса R.

Получим: $\dfrac{l}{R} = \pi.$

Следовательно, радианная мера угла в $180^0=\pi$ *рад*.

Отсюда получаем, что радианная мера угла в 1^0 равна $\dfrac{\pi}{180}$:

$1^0 = \dfrac{\pi}{180}$ *рад.*

Приближенно 1^0 равен 0,017 рад.

Из равенства $180^0=\pi$ *рад* также следует, что градусная мера угла в 1 рад равна

$\frac{180}{\pi}$: *1 рад*$=\frac{180^0}{\pi}$.

Приближенно 1 рад равен 57^0.

2. Рассмотрите примеры перехода от радианной меры к градусной и от градусной меры к радианной.

Пример 1. Выразите в градусах 4,5 рад.

Решение

Так как 1 *рад*$=\frac{180^0}{\pi}$, то 4,5 *рад*$= 4{,}5\cdot\frac{180^0}{\pi}=\frac{810^0}{\pi}\approx 258^0$.

Пример 2. Найдите радианную меру угла в 72^0.

Решение

Так как $1^0=\frac{\pi}{180}$ *рад*, то $72^0=72\cdot\frac{\pi}{180}$ *рад*$=\frac{2\pi}{5}$ *рад* $\approx 1{,}3$ *рад.*

Замечание. При записи радианной меры угла обозначение *рад* часто опускают.

3. Выполните задания.

1) Выразите в радианной мере углы 30^0, 45^0, 60^0, 90^0, 270^0, 360^0.

2) Заполните таблицу:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$								
$\cos\alpha$								
$\text{tg}\,\alpha$								
$\text{ctg}\,\alpha$								

3) Найдите градусную меру угла, радианная мера которого равна $0{,}5$; 10; $\frac{\pi}{5}$; $-\frac{9\pi}{2}$; $\frac{\pi}{9}$; $-\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{4}$; 12π.

4) Найдите радианную меру угла, равного 135^0, 210^0, 36^0, 150^0, 240^0, 300^0, -120^0, -225^0.

5) Вычислите:

1) $2\sin\frac{\pi}{3}+\text{tg}\frac{\pi}{4}$;

2) $\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}$;

3) $2\sin\pi-2\cos\frac{3\pi}{2}+3\text{tg}\frac{\pi}{4}-\text{ctg}\frac{\pi}{2}$;

4) $\sin(-\frac{\pi}{4})+3\cos\frac{\pi}{3}-\text{tg}\frac{\pi}{6}+\text{ctg}\frac{\pi}{3}$;

5) $\sin^2\frac{\pi}{4}+\sin^2\frac{\pi}{3}$;

6) $\text{tg}^2\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\,\text{tg}^2\frac{\pi}{3}$.

Практическая работа №2

Тема: **Основные тригонометрические формулы.**

Цели:

- познакомиться с основными тригонометрическими формулами;
- научиться использовать тригонометрические формулы при упрощении и преобразовании тригонометрических выражений, нахождении значений тригонометрических функций по одной из известных.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, основные формулы тригонометрии, справочный материал по тригонометрии.

Ход работы:

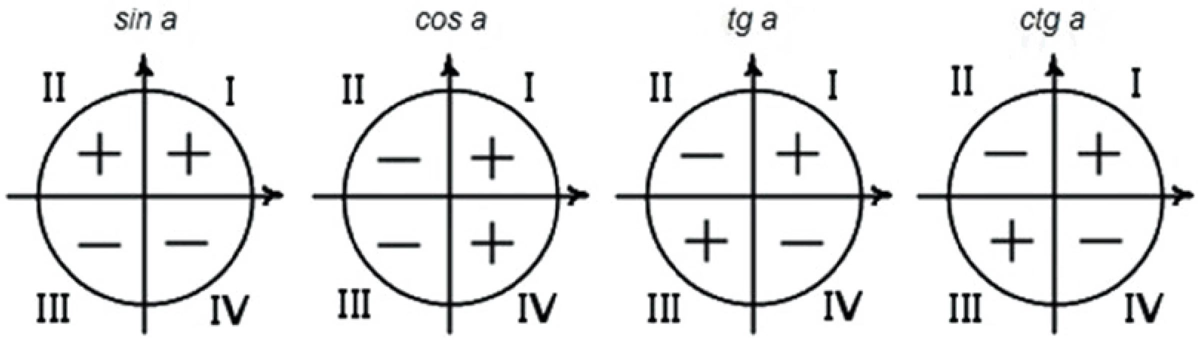
1.Познакомьтесь с основными формулами тригонометрии, вспомните знаки тригонометрических функций по координатным четвертям

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1;$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha};\ \operatorname{ctg}^2\alpha+1=\frac{1}{\sin^2\alpha}$$



2. Используя основные формулы тригонометрии упростите следующие выражения:

1) $1-\cos^2 x;$

2) $\sin^2 x-1;$

3) $\cos^2 x+(1-\sin^2 x);$

4) $\sin^2 x+2\cos^2 x-1;$

5) $(1-\sin x)(1+\sin x);$

6) $(1-\cos x)(1+\cos x);$

7) $\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x};$

8) $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x};$

9) $\sin^2 x+\cos^2 x+tg^2 x$

10) $\sin x\cdot ctgx$

3. Используя справочный материал по тригонометрии и образцы решения, найдите значения тригонометрических функций по одной из известных. Задания выполните по вариантам.

Вариант 1

1) Дано: $\sin\alpha = -\frac{9}{41}$; $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Найти: $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

2) Дано: $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Найти: $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Вариант 2

1) Дано: $\sin\alpha = \frac{7}{25}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Найти: $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

2) Дано: $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Найти: $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Образец решения задания

Задание:

Дано: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Найти: $\cos\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

Решение: Из формулы $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ получаем, что $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$.

Т.к. α является углом 2-ой четверти, то его косинус отрицателен. Значит

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{25}{169}} = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}.$$

Найдем $tg\alpha$ по формуле $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{13}\cdot\left(-\frac{13}{12}\right) = -\frac{5}{12}$, $tg\alpha = -\frac{5}{12}$.

Найдем $ctg\alpha$ по формуле $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5} = -\frac{12}{5} = -2\frac{2}{5}$, $ctg\alpha = -2\frac{2}{5}$.

Ответ: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $tg\alpha = -\frac{5}{12}$, $ctg\alpha = -2\frac{2}{5}$.

Практическая работа №3

Тема: **Применение тригонометрических формул к преобразованию выражений.**

Цели:

- вырабатывать навыки использования тригонометрических формул при упрощении и преобразовании тригонометрических выражений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал по тригонометрии.

Ход работы:

Используя справочный материал выполните задания

1. Докажите тождество:

а) $(1+tg\alpha)^2+(1-tg\alpha)^2=\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$; *б)* $(tg\alpha+ctg\alpha)^2-(tg\alpha-ctg\alpha)^2=4$

2. Упростите тригонометрические выражения:

а) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1$; *б)* $1-\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{ctg\alpha}$; *в)* $1-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; *г)* $\dfrac{1}{\sin\alpha-1}-\dfrac{1}{\sin\alpha+1}$

3. Докажите, что при всех допустимых значениях α, значение выражения не зависит от α: *а)* $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1}{(\sin^2\alpha)}$; *б)* $\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$

4. Преобразуйте тригонометрические выражения:

а) $\dfrac{tg\alpha+1}{1+ctg\alpha}$ *б)* $tg(-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha$ *в)* $\dfrac{ctg(-\alpha)\sin\alpha}{\cos\alpha}$

г) $\cos^2\alpha\, tg^2(-\alpha)-1$ *д)* $\dfrac{1-tg(-\alpha)}{\sin\alpha+\cos(-\alpha)}$ *е)* $\dfrac{tg(-\alpha)+1}{1-ctg\alpha}$

5. Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+tg\alpha$ *б)* $\dfrac{tg^2\alpha-1}{tg^2\alpha+1}+\cos^2\alpha$ *в)* $\sin^2 x+\cos^2 x+\mathrm{tg}^2 x$

г) $(\sin x-2\cos x)^2+4\sin x\cos x$ *д)* $\mathrm{tg}^2 x(1-\sin^2 x)$ *е)* $\dfrac{\cos^2 x-1}{\sin^2 x-1}+\mathrm{tg}\dfrac{1}{8}\mathrm{ctg}\dfrac{1}{8}$

Справочный материал

Основные формулы

$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad x\in R.$

$tg\,x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

$ctg\,x=\dfrac{\cos x}{\sin x},\quad x\neq\pi k,\ k\in Z.$

$$1+tg^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z .$$

$$1+ctg^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq \pi k, \quad k\in Z .$$

$$tg\, x\cdot ctg\, x=1, \quad x\neq \frac{\pi k}{2}.$$

Дополнительные формулы

$$\sin^2 x=1-\cos^2 x, \quad x\in R.$$

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x, \quad x\in R.$$

Практическая работа №4

Тема: **Формулы приведения**

Цели:

- познакомиться с понятием формул приведения, правилом, с помощью которого можно записать любую формулу приведения не прибегая к таблице;
- научиться использовать правило применения формул приведения, приводя выражения к тригонометрической функции угла.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы приведения, справочный материал по тригонометрии.

Ход работы:

1.Познакомьтесь с основными вопросами темы.

Тригонометрические функции углов вида $\frac{\pi}{2}\pm\alpha, \pi\pm\alpha, \frac{3\pi}{2}\pm\alpha, 2\pi\pm\alpha$ могут быть выражены через функции угла α с помощью формул, которые называют *формулами приведения.*

2. В таблице даны формулы приведения для тригонометрических функций.

Функция (угол в º)	90º - α	90º + α	180º - α	180º + α	270º - α	270º + α	360º - α	360º + α
sin	cos α	cos α	sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α	sin α
cos	sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	-ctg α	-tg α	tg α	ctg α	-ctg α	-tg α	tg α
ctg	tg α	-tg α	-ctg α	ctg α	tg α	-tg α	-ctg α	ctg α
Функция (угол в рад.)	**π/2 – α**	**π/2 + α**	**π – α**	**π + α**	**3π/2 – α**	**3π/2 + α**	**2π – α**	**2π + α**

Проследите по таблице закономерности, имеющие место для формул приведения, запишите их в тетрадь:

- функция в правой части равенства берется с тем же знаком, какой имеет исходная функция, если считать, что угол α является углом первой четверти;
- для углов $\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$ название исходной функции сохраняется;
- для углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ название исходной функции заменяется (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).
3. Рассмотрите пример по использованию закономерностей для формул приведения:
Задание: Выразить tg(π-α) через тригонометрическую функцию угла α .

Решение:
Если считать, что α является углом I четверти, то π-α будет углом II четверти, во второй четверти тангенс отрицателен, значит в правой части равенства следует поставить знак «минус». Для угла π-α название исходной функции «тангенс» сохраняется. Поэтому tg(π-α)=-tgα

3. Выполните следующие задания:
1) Приведите к тригонометрической функции угла от *0˚до 90˚:* *tg 137˚, sin(-178˚), sin 680˚, cos(-1000˚)*

2) Найдите значение выражения: *sin 240˚, cos(-210˚), tg 300˚, sin 330˚, ctg 225˚, sin 315˚*

1) Упростите выражение: $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2})$; $\cos(\alpha - \pi)$; $ctg(\alpha - 360^\circ)$; $tg(-\alpha + 270^\circ)$

4) Преобразуйте выражение:
а) sin(90˚-α)+cos(180˚+ α)+tg(270˚+ α)+ctg(360˚+ α)
б) $\frac{\cos(-\alpha)\cos(180^\circ + \alpha)}{\sin(-\alpha)\sin(90^\circ + \alpha)}$

Практическая работа №5

Тема: Формулы суммы и разности синусов и косинусов.

Цели:
- вырабатывать навыки использования формул суммы синусов и косинусов для преобразования тригонометрических выражений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал по тригонометрии.

Ход работы:

Используя справочный материал по тригонометрии упростите выражения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha + \text{tg}\,\beta}{1 - \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

$$\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg}\,\alpha - \text{tg}\,\beta}{1 + \text{tg}\alpha \cdot \text{tg}\,\beta}$$

$$\text{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot \text{ctg}\,\beta - 1}{\text{ctg}\,\beta + \text{ctg}\,\alpha}$$

$$\text{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{ctg}\alpha \cdot \text{ctg}\,\beta + 1}{\text{ctg}\,\beta - \text{ctg}\,\alpha}$$

Практическая работа №6

Тема: Упрощение тригонометрических выражений.

Цели:
- вырабатывать навыки использования основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал по тригонометрии.

Ход работы:

Используя справочный материал по тригонометрии упростите выражения:

1) $(tg\alpha + ctg\alpha)(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$;

2) $\dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 1}{ctg\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$;

3) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

4) $\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$;

5) $(\sin(\pi + \alpha) + \cos(\dfrac{\pi}{2} + \alpha))^2 + (\cos(2\pi - \alpha) - \sin(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha))^2$;

6) $\cos(\dfrac{\pi}{3} + \alpha)\cos\alpha + \sin(\dfrac{\pi}{3} + \alpha)\sin\alpha$;

7) $\sin\alpha\sin(\alpha + \beta) + \cos\alpha\cos(\alpha + \beta)$;

8) $4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\pi - \alpha}{2}\sin(\dfrac{3\pi}{2} - \alpha)$;

9) $2\cos^2\dfrac{\pi + \alpha}{4} - 2\sin^2\dfrac{\pi + \alpha}{4}$;

10) $\dfrac{(\sin\beta + \cos\beta)^2}{1 + \sin 2\beta}$;

11) $\left(\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1-\sin\alpha}\right)\sin 2\alpha$;

12) $\dfrac{1+\cos(\pi+\beta)}{\sin(\pi-\beta)}$;

13) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$;

14) $ctg\beta(1-\cos 2\beta)$.

Практическая работа №7

Тема: Решение упражнений по тригонометрии.

Цели:

- вырабатывать навыки использования основных тригонометрических формул для преобразования тригонометрических выражений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал по тригонометрии.

Ход работы:

Используя справочный материал по тригонометрии выполните следующие задания:

1) Найдите наибольшее значение выражения:
   1) $1-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$;
   2) $1-\sin\alpha\cos\alpha\, tg\alpha$;
   3) $\cos^2\alpha\, tg^2\alpha+5\cos^2\alpha-1$;
   4) $\sin\alpha+3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$.
2) Докажите тождества:
   1) $(tg\alpha+ctg\alpha)^2-(tg\alpha-ctg\alpha)^2=4$;
   2) $(2+\sin\beta)(2-\sin\beta)+(2+\cos\beta)(2-\cos\beta)=7$;
   3) $ctg\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}$;
   4) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$;
   5) $\dfrac{\cos\beta}{1-\sin\beta}-\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}=2tg\beta$;
   6) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-\sin 2\alpha=1$.
3) Найдите *sin(α+β)*, если $\sin\alpha=\dfrac{9}{41}$, $\sin\beta=-\dfrac{40}{41}$, α- угол второй четверти, а β- угол четвертой четверти.
4) Упростите выражения:
   1) $\dfrac{\sin 2\beta}{1+\cos 2\beta}$;
   2) $ctg\alpha(1-\cos 2\alpha)$;
   3) $\dfrac{1+\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)}$;
   5) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos 2\alpha}ctg(\pi+\alpha)$;
   6) $(tg\alpha+ctg\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;
   7) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$.

4) $\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin(\pi+2\alpha)} tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

Практическая работа № 8

Тема: Комплексные числа. Алгебраические действия над комплексными числами.

Цели:
- познакомиться с формулами алгебраических действий над комплексными числами, научиться выполнять сложение, вычитание, умножение и деление двух комплексных чисел.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике».

Ход работы:

1. Познакомьтесь с основными вопросами темы

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь во множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля. Комплексные числа необходимы в различных приложениях математики.

Комплексное число – это выражение вида $z = x + iy$, (1.1)

где x, y – вещественные числа, а $i = \sqrt{-1}$ – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, x, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение $x = \operatorname{Re} z$); второе, y, - *мнимой частью* ($y = \operatorname{Im} z$). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

ислом, *сопряженным* к $z = x + iy$, называют число вида $\bar{z} = x - iy$. Используя формулу разности квадратов, получаем, что $z\bar{z} = x^2 + y^2$. Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами* $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$:

1) $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$ (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2) $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$ (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что $i^2 = -1$);

3) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ (эта операция возможна только в случае, когда $z_2 \neq 0 + i0 = 0$).

ример 2. Вычислить $z=\dfrac{2-7i}{3+4i}$ и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

шение. Действуя в соответствии с правилами получаем:

$$z=\frac{2-7i}{3+4i}=\frac{(2-7i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-21i+28i^2}{9-16i^2}=\frac{6-29i-28}{9+16}=\frac{-22-29i}{25}=-\frac{22}{25}-\frac{29}{25}i\ ;$$

поэтому $\operatorname{Re} z=-\dfrac{22}{25}$, $\operatorname{Im} z=-\dfrac{29}{25}$.

Задание 1. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1) $(2-3i)-(1+i)(2i-1)$ 2) $\dfrac{2+3i}{1-i}$ 3) $6i+\dfrac{1+7i}{2-3i}$

4) $(3+i)\dfrac{1+i}{1-i}$

Задание 2. Выполните действия над комплексными числами:

1) *(-12+5i)+(7-3i)*
2) *(5+7i)(-3-4i)*
3) *(-2+3i)(1-4i)*
4) *(-10-8i)-(7-6i)*
5) *(-7-8i)-(3-4i)*
6) *(-3+5i):(5-6i)*
7) *(10+3i):(20-12i)*
8) *(2+i):(-4-3i)*
9) *(-2-3i):(8-9i)*
10) *(0,5-4,3i):(-3+2i)*
11) *(2,5-1,7i):(5-4i)*
12) *(5+2i):(2-5i)+(3-4i):(4+3i)*
13) *(6-2,5i)(7-5i):((5,1-8)*

Практическая работа № 9

Тема: Решение уравнений с отрицательным дискриминантом.

Цель:
- познакомиться с формулами решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом, научиться решать уравнения с отрицательным дискриминантом.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике»

Ход работы:

1. Запишите формулы для нахождения дискриминанта и корней квадратного уравнения в случае отрицательного дискриминанта.
2. Рассмотрите и запишите пример решения уравнения с отрицательным дискриминантом.

Пример 1. Решить уравнение $x^2 - 6x + 18 = 0$.

Решение. Дискриминант данного уравнения: $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 36 - 72 = -36$ меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{36} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 6\,i}{2}$, т.е. $x_1 = 3 + 3i$; $x_2 = 3 - 3i$.

3. Решите квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом:

1) $x^2-4x+5=0$
2) $x^2-6x+16=0$
3) $x^2+2x+3=0$
4) $x^2+4=0$
5) $x^2+4x+12=0$
6) $x^2-4x+8=0$
7) $x^2-2x+5=0$
8) $2x^2-x+1=0$
9) $x^2+6x+18=0$
10) $x^2+8x+17=0$
11) $x^2+x+1=0$
12) $3x^2+x+1=0$

Практическая работа № 10

Тема: Корень n-ой степени и его свойства.

Цели:

- познакомиться с определениями арифметического корня, корня n-ой степени, свойствами корня n-ой степени;
- используя свойства корней *n-й* степени добиться безошибочного преобразования выражений, содержащих радикалы.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

1. Запишите определение квадратного корня из числа а.
2. Запишите определение арифметического корня n-ой степени из числа а.
3. Запишите определение корня n-ой степени из числа а.
4. Рассмотрите примеры решения уравнений.
5. Запишите основные свойства корней, рассмотрите примеры применения этих свойств.
6. Выполните задания:

1) Вычислить:

1. $\sqrt[3]{125}$; 2. $\sqrt[4]{0{,}0001}$; 3. $\sqrt[5]{-32}$;

4. $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$; 5. $\sqrt[3]{9\cdot 24}$; 6. $\dfrac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}$;

7. $\sqrt[3]{0{,}001\cdot 27}$; 8. $\sqrt{\sqrt[3]{2^6\cdot 6^{12}}}$;

9. $\sqrt[3]{\sqrt{0{,}000001}}\cdot\sqrt{\sqrt{256}}$.

10. $\sqrt[3]{0{,}064}$; 11. $\sqrt[4]{81}$; 12. $\sqrt[7]{-128}$;

13. $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$; 14. $\sqrt[5]{48\cdot 162}$; 15. $\dfrac{\sqrt[7]{2}}{\sqrt[7]{256}}$;

16. $\sqrt[4]{0{,}0081\cdot 16}$; 17. $\sqrt{\sqrt[3]{2^6\cdot 6^{12}}}$

2) Вынести множитель за знак корня:

1. $\sqrt[4]{48}$;
2. $\sqrt[3]{a^5}$;
3. $\sqrt{x^5y^8}$.
4. $\sqrt[3]{32}$;
5. $\sqrt[4]{a^7}$;
6. $\sqrt[5]{32x^6y^{12}}$.

3) Внести множитель под знак корня:

1. $2\cdot\sqrt[5]{3}$;
2. $3x^3\cdot\sqrt{5xy}$
3. $3\cdot\sqrt[4]{2}$;
4. $2x^2\cdot\sqrt[3]{5x}$

4) Представить в виде $\sqrt[n]{a}$:

1. $\sqrt[3]{\sqrt{x}}$;
2. $\sqrt{x^3\cdot\sqrt{x}}$
3. $\sqrt[5]{\sqrt{2}}$;
4. $\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}$.

5) Сравнить числа:

1. $\sqrt[3]{23}$ и $\sqrt[3]{25}$;
2. $\sqrt{5}$ и $\sqrt[6]{7}$.

Справочный материал

Корни

Корнем n-ой степени из числа а называется такое число, n-ая степень которого равна а.
Арифметическим корнем n-ой степени из числа а называют неотрицательное число, n-ая степень которого равна а.

Свойства корней

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел а и b выполнены равенства:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ (b \neq 0)$

3) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}\ (k > 0)$

4) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}\ (k > 0)$

5) $\sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k\ (если\ \ k \leq 0, то\ a \neq 0)$

6) *Для любых чисел a и b, таких, что* $0 \leq a < b$, *выполняется неравенство* $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Практическая работа № 11

Тема: Степень с рациональным показателем.

Цели:

- познакомиться с определением степени с рациональным показателелем, свойствами степени с рациональным показателем;
- используя свойства степени с рациональным показателем добиться безошибочного преобразования выражений, содержащих степени, способствовать выработке навыков сравнения чисел, используя свойства степени с рациональным показателем.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

1. Запишите определение степени с рациональным показателем.
2. Запишите свойства степеней с рациональным показателем.
3. Рассмотрите и запишите примеры нахождения значения выражений, содержащих степени.
4. Выполните следующие задания:

I вариант

Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$\sqrt{2}$;

$\sqrt[3]{17}$;

$\sqrt[8]{a^{12}}$;

$\sqrt[4]{6^{-5}}$.

Представить выражение в виде корня из числа или выражения:

$7^{\frac{3}{5}}$;

$5x^{-\frac{2}{3}}$;

$(6a)^{\frac{3}{7}}$;

$(x-y)^{\frac{1}{2}}$.

Вычислить:

$16^{\frac{1}{4}}$;

$8^{\frac{2}{3}}$;

$3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$;

$0{,}01^{-\frac{1}{2}}$;

$-17\cdot 125^{1/3}+18^{0}$;

$6^{1/3}\cdot 3^{1/3}\cdot (0{,}25)^{1/6}$

$64^{\frac{2}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot \left(8^{0}\right)^{-3}$.

Сравнить числа:

$4{,}3^{\frac{2}{3}}$ и $8{,}2^{\frac{2}{3}}$;

IIвариант

Представить выражение в виде степени с рациональным показателем:

$\sqrt{5}$;

$\sqrt[5]{16}$;

$\sqrt[7]{m^{11}}$;

$\sqrt[3]{5^{-7}}$

Представить выражение в виде корня из числа или выражения:

$9^{\frac{8}{11}}$;

$7y^{-\frac{2}{5}}$;

$(5x)^{\frac{4}{9}}$;

$6(a-b)^{\frac{1}{3}}$.

Вычислить:

$121^{\frac{1}{2}}$;

$8^{\frac{4}{3}}$;

$2^{-2}\cdot 16^{\frac{1}{2}}$;

$0{,}001^{-\frac{1}{3}}$;

$-15\cdot 81^{1/4}-19^{0}$;

$6^{1/3}\cdot 18^{1/3}\cdot 4^{1/6}$

$625^{\frac{1}{4}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}\cdot \left(32^{0}\right)^{-5}$.

Сравнить числа:

$3{,}2^{-\frac{2}{5}}$ и $2{,}6^{-\frac{2}{5}}$;

$0{,}3^{\frac{2}{5}}$ и $0{,}3^{-\frac{1}{3}}$.	$6{,}5^{\frac{4}{7}}$ и $6{,}5^{\frac{2}{5}}$.

Справочный материал

Степени

Степенью числа a с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где m – целое число, а n – натуральное (n>1) называется число $\sqrt[n]{a^m}$.

Свойства степеней

Для любых рациональных r и s и любых положительных a и b справедливы равенства:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

2) $a^r : a^s = a^{r-s}$

3) $(a^r)^s = a^{rs}$

4) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

6) *Пусть r- рациональное число и 0<a<b. Тогда*

$a^r < b^r$ *при* $r > 0$,

$a^r > b^r$ *при* $r < 0$.

7) Для любых рациональных r и s из неравенства r>s следует, что

$a^r > a^s$ *при* $a > 1$,

$a^r < a^s$ *при* $0 < a < 1$.

Практическая работа №12

Тема: Преобразование выражений, содержащих степени и корни.

Цели:
- вырабатывать навыки преобразования выражений, содержащих степени и корни.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Используя справочный материал выполните задания:

ВАРИАНТ 1

Вычислить:

1) $\sqrt[3]{0,064}$. 2) $\sqrt[4]{81}$. 3) $\sqrt[7]{-128}$. 4) $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}$. 5) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$.

Упростить:

1) $\sqrt[4]{8a^3}\cdot\sqrt[4]{2a^5}$. 2) $\dfrac{\sqrt[3]{108b^{11}}}{\sqrt[3]{4b^2}}$. 3) $\dfrac{\sqrt[5]{9x^2}}{\sqrt[5]{288x^7}}$.

Вынести множитель за знак корня:

1) $\sqrt[4]{32}$. 2) $\sqrt[3]{a^5}$. 3) $\sqrt[4]{16\cdot a^5\cdot b^8}$. 4) $\sqrt[3]{81\cdot a^5\cdot b^{10}}$.

Внести множитель под знак корня:

1) $3\cdot\sqrt[4]{2}$. 2) $c\cdot\sqrt[4]{2}$. 3) $2x\cdot\sqrt[3]{5x}$. 4) $2\cdot x^2\cdot\sqrt[3]{3xy}$.

ВАРИАНТ 2

Вычислить:

1) $\sqrt[3]{125}$. 2) $\sqrt[4]{0{,}0001}$. 3) $\sqrt[5]{-32}$. 4) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}$. 5) $\dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[4]{729}}$.

Упростить:

1) $\sqrt[3]{9c^5}\cdot\sqrt[3]{3c^4}$. 2) $\dfrac{\sqrt[5]{160x^{19}}}{\sqrt[5]{5x^4}}$. 3) $\dfrac{\sqrt[5]{5x^4}}{\sqrt[5]{160x^{19}}}$.

Вынести множитель за знак корня:

1) $\sqrt[3]{81}$. 2) $\sqrt[4]{a^7}$. 3) $\sqrt[3]{32\cdot x^6\cdot y^9}$. 4) $\sqrt[5]{64\cdot x^6 y^{12}}$.

Внести множитель под знак корня:

1) $2\cdot\sqrt[5]{3}$. 2) $x\cdot\sqrt[3]{5x}$. 3) $3\cdot x\cdot\sqrt[4]{5xy}$. 4) $2\cdot y^2\cdot\sqrt[3]{4xy}$.

Обобщение понятия степени

ВАРИАНТ 1

Представить выражение в виде степени с рациональным показателем (1– 4).

1) $\sqrt{7}$. 2) $\sqrt[4]{15}$. 3) $\sqrt[7]{b^3}$. 4) $\sqrt[5]{3^{-3}}$.

Представить выражение в виде корня из числа или выражения (5– 8).

5) $2^{\frac{3}{4}}$. 6) $8^{-\frac{1}{4}}$. 7) $4b^{\frac{3}{7}}$. 8) $(2b)^{\frac{2}{3}}$.

Вычислить (9 – 20).

9) $81^{\frac{1}{4}}$. 10) $36^{\frac{3}{2}}$. 11) $27^{\frac{2}{3}}$. 12) $0{,}001^{-\frac{1}{3}}$. 13) $2\cdot 64^{\frac{2}{3}}$. 14) $4^{-1}\cdot 8^{\frac{1}{3}}$. 15) $10\cdot 32^{2/5}-10^0$.

ВАРИАНТ 2

Представить выражение в виде степени с рациональным показателем (1– 4).

1) $\sqrt{12}$. 2) $\sqrt[6]{15}$. 3) $\sqrt[6]{m^5}$. 4) $\sqrt[7]{4^{-3}}$.

Представить выражение в виде корня из числа или выражения (5– 8).

5) $8^{\frac{7}{9}}$. 6) $7^{-\frac{2}{5}}$. 7) $5m^{\frac{4}{9}}$. 8) $6m^{\frac{3}{8}}$.

Вычислить (9 – 20).

9) $36^{\frac{1}{2}}$. 10) $27^{\frac{4}{3}}$. 11) $0{,}01^{-\frac{1}{2}}$. 12) $49^{\frac{3}{2}}$. 13) $3\cdot 8^{\frac{2}{3}}$. 14) $2^{-3}\cdot 64^{\frac{1}{6}}$. 15) $10\cdot 243^{2/5}-10^0$.

Практическая работа № 13

Тема: **Преобразование графиков.**

Цели:

- познакомиться с определением числовой функции, аргумента и значения функции, графика функции, правилами преобразования графиков;
- научиться строить графики функций, используя правила преобразования- перенос, сжатие, отображение.

Норма времени: 2 часа

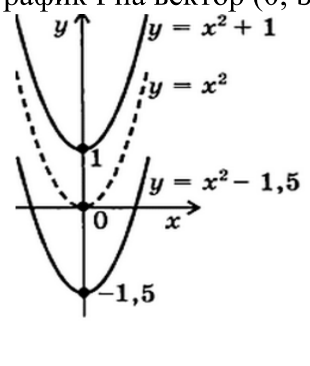
Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

1. Запишите определение числовой функции.
2. Запишите определения аргумента и значения функции.
3. Запишите понятие графика функции.
4. Запишите правило для построения графика функции *f(x)+b* и рассмотрите пример.
5. Запишите правило для построения графика функции *kf(x)* и рассмотрите пример.
6. Запишите правило для построения графика функции *f(x-a)* и рассмотрите пример.
7. Запишите правило для построения графика функции $f(\frac{x}{k})$ и рассмотрите пример.
8. В одной и той же системе координат постройте графики функций:
   a. $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}+2$, $y=\frac{1}{x-2}$
   b. $y=x^2$, $y=4-x^2$, $y=-(x-2)^2$,
   c. $y=\frac{1}{x-3}+1$
   d. $y=1-(x+2)^2$,
   e. $y=(x-2)^2-4$,
   f. $y=2+\frac{1}{x}$

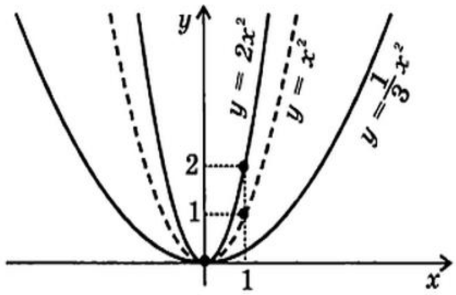
Справочный материал и образцы решения
Правила преобразования графиков функции

1. Для построения графика функции y=f(x)+b, где b – постоянное число, надо перенести график f на вектор (0; b) вдоль оси ординат.

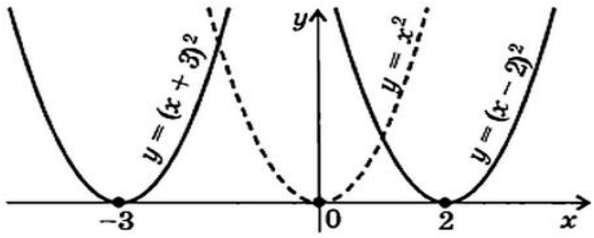


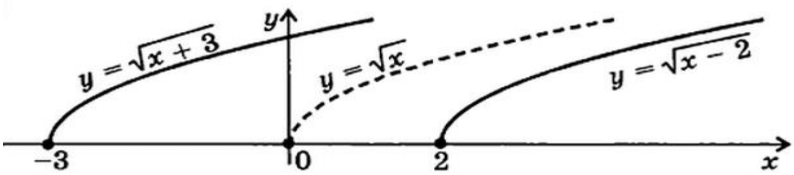
2. Для построения графика функции y=kf(x) надо растянуть график функции y=f(x) в k раз вдоль оси ординат.

Замечание: Если 0<│k│<1, то растяжение с коэффициентом k называют сжатием. Если k<0, то для построения графика функции y=kf(x) надо сначала растянуть график в │k│раз, а затем отразить его симметрично относительно оси абсцисс.

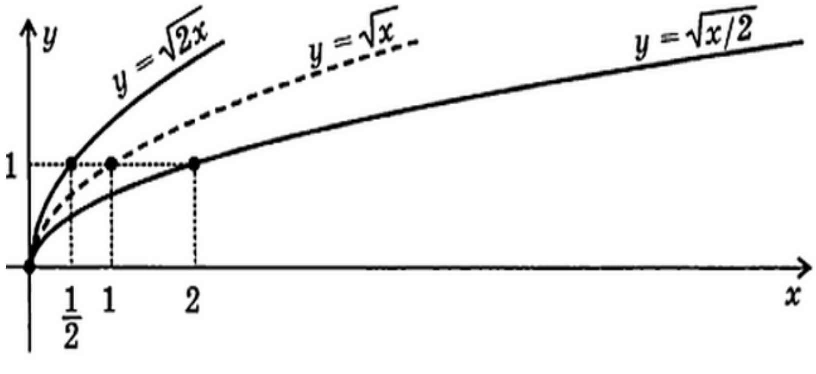


3. График функции y=f(x-a) получается из графика f переносом (вдоль оси абсцисс) на вектор (a;0). Обратите внимание, что если a>0, то вектор (a;0) направлен в положительном направлении оси абсцисс, а при a<0 – в отрицательном.





4. Для построения графика функции y=f$\left(\frac{x}{к}\right)$ надо подвергнуть график функции f растяжению с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.



Практическая работа №14

Тема: Возрастание и убывание функции. Экстремумы.

Цели:

- познакомиться с понятиями возрастания и убывания функции, экстремумами функции, научиться находить промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума и экстремумы функции по графику.

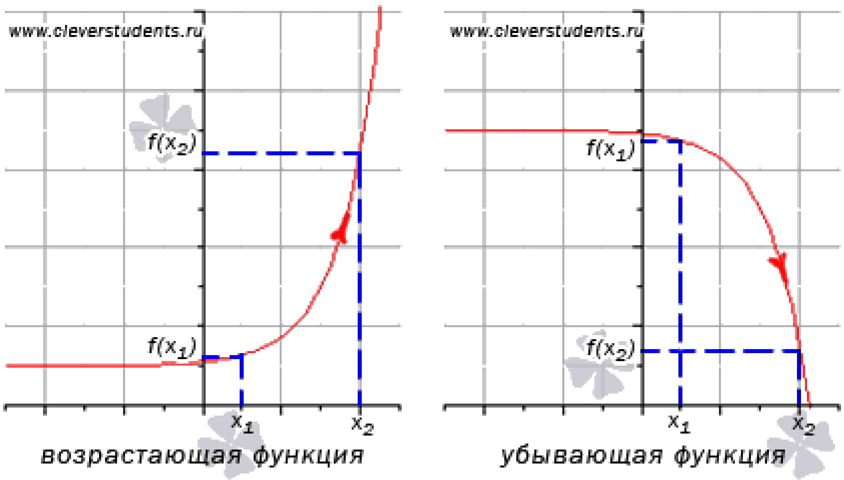
Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник

Теоретический материал

Определение возрастающей функции. Функция *y=f(x)* возрастает на интервале *X*, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, \quad x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Определение убывающей функции. Функция *y=f(x)* убывает на интервале *X*, если для любых $x_1 \in X$ и $x_2 \in X, \quad x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$. Другими словами – большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.



ЗАМЕЧАНИЕ: если функция определена и непрерывна в концах интервала возрастания или убывания *(a;b)*, то есть при *x=a* и *x=b*, то эти точки включаются в промежуток возрастания или убывания. Это не противоречит определениям возрастающей и убывающей функции на промежутке *X*.

Точки экстремума, экстремумы функции.

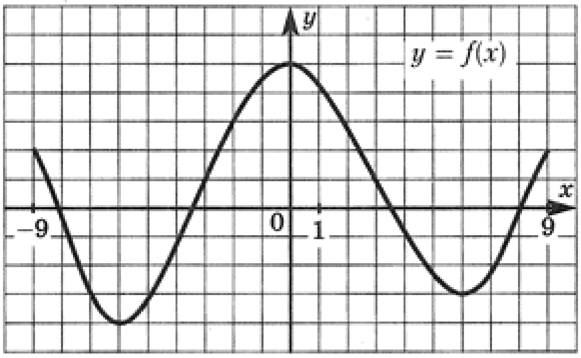
Точку x_0 называют **точкой максимума** функции *y=f(x)*, если для всех *x* из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Значение функции в точке максимума называют **максимумом функции** и обозначают $y_{\max}$.

Точку x_0 называют **точкой минимума** функции *y=f(x)*, если для всех *x* из ее окрестности справедливо неравенство $f(x_0) \leq f(x)$. Значение функции в точке минимума называют **минимумом функции** и обозначают $y_{\min}$.

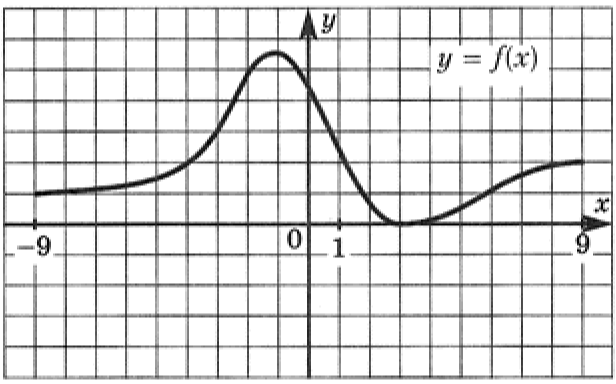
Под окрестностью точки x_0 понимают интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$, где ε - достаточно малое положительное число.

Точки минимума и максимума называют **точками экстремума**, а значения функции, соответствующие точкам экстремума, называют **экстремумами функции**.

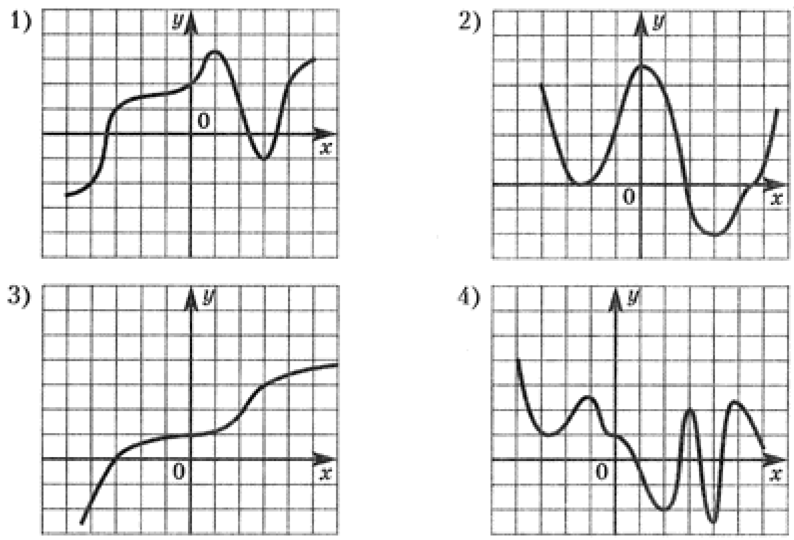
Пример 1.Определить по графику промежутки возрастания функции.



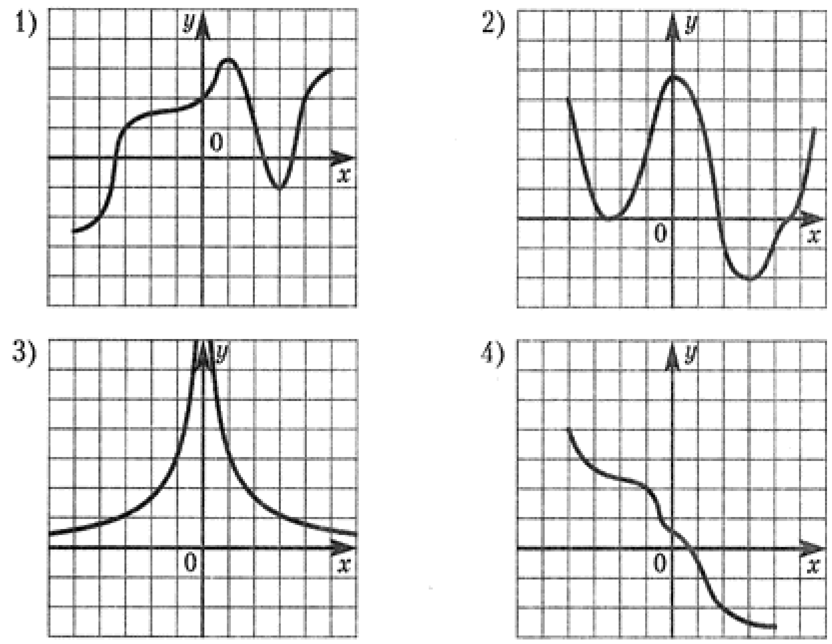
Пример 2.Определить по графику промежутки убывания функции.



Пример 3.Укажите график возрастающей функции.

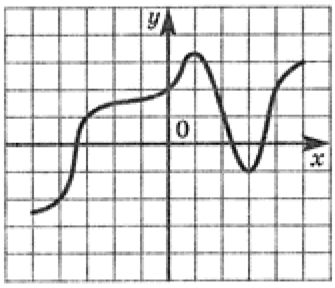


Пример 4.Укажите график убывающей функции.

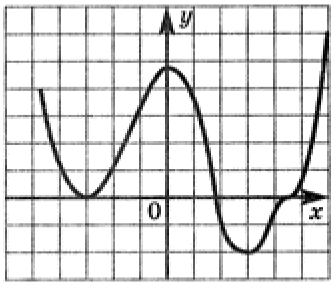


Пример 5.Указать интервалы возрастания функций, графики которых представлены на рисунках:

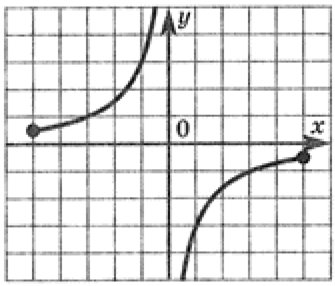
1)



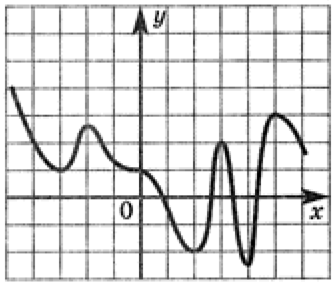
2)



3)



4)



Практическая работа № 15

Тема: Исследование функций.
Цели:
- познакомиться с общей схемой исследования функции,
- научиться проводить по общей схеме исследование функции, строить график функции, если известны её свойства.

Норма времени: 2 часа

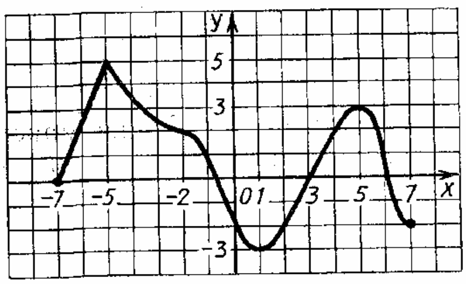
Оборудование: инструкционная карта

Ход работы:

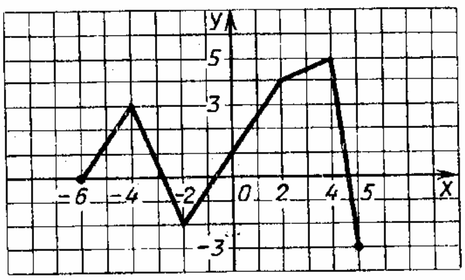
1.Познакомьтесь с *общей схемой исследования функции*:

1. Найти область определения и значений данной функции.
2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Вычислить координаты точек пересечения графика с осями координат.
4. Найти промежутки знакопостоянства функции.
5. Выяснить, на каких промежутках функция возрастает, а на каких убывает.
6. Найти точки экстремума и значения функции в этих точках.

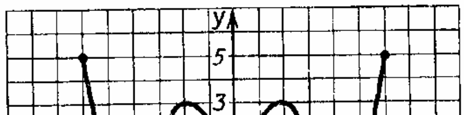
2. Для функций, графики которых изображены на рисунках, найдите промежутки возрастания и убывания функции, точки максимума и минимума, экстремумы функции.



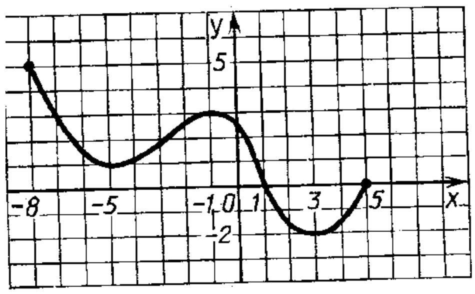
а)



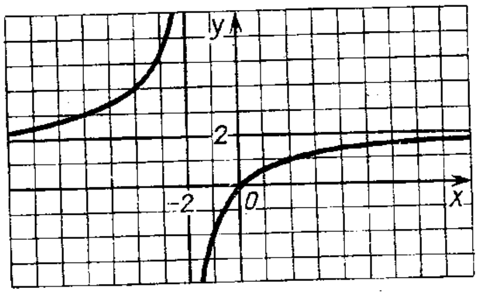
б)



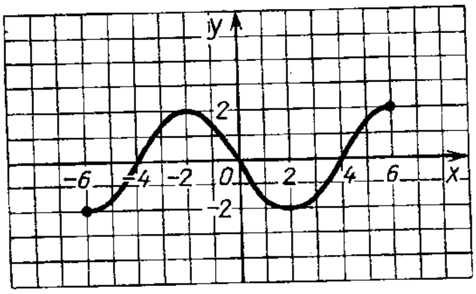
3.Проведите по общей схеме исследование функций, заданных графиками:



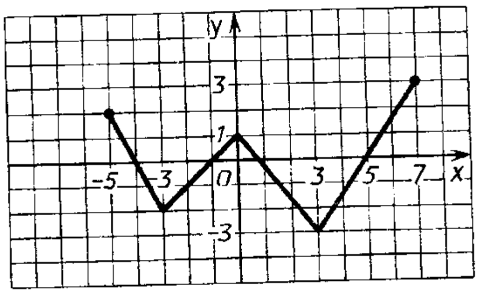
а)



б)



в)



г)

Практическая работа № 16

Тема: Свойства тригонометрических функций (синус, косинус).
Цели:
- познакомиться с общей схемой исследования тригонометрических функций, видом графиков синуса и косинуса,
- научиться проводить по общей схеме исследование функций синуса и косинуса, строить графики данных функций, если известны их свойства.

Норма времени: 2 часа

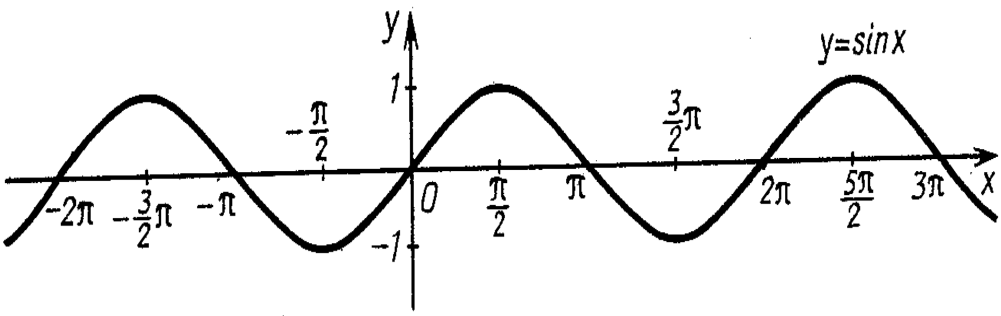
Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа» .

Ход работы:

1. Запишите определения функции синус и косинус.
2. Познакомьтесь со схемой исследования тригонометрических функций, исследуйте функции синуса и косинуса по схеме:

1) область определения;
2) область значений;
3) чётность, нечётность;
4) наименьший положительный период;
5) координаты точек пересечения графика с осью ох;
6) координаты точек пересечения графика с осью оу;
7) промежутки, на которых функция принимает положительные значения;
8) промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения;
9) промежутки возрастания;
10) промежутки убывания;
11) точки минимума;
12) минимумы функции;
13) точки максимума;
14) максимумы функции.

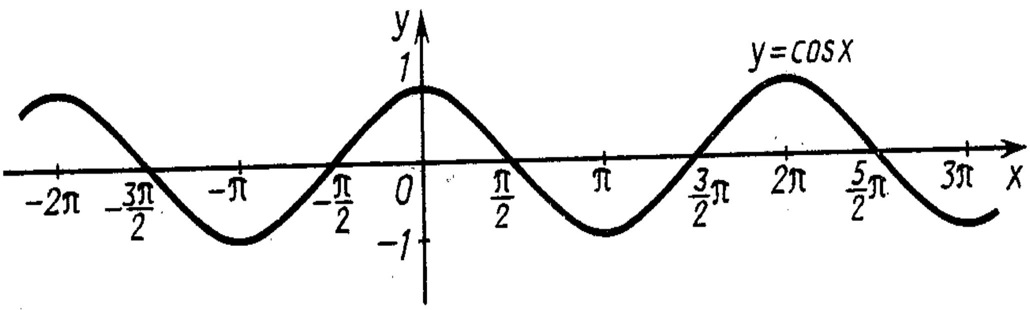
3. Заполните таблицу для функции синуса по графику



чётность, нечётность	
наименьший положительный период	
координаты точек пересечения графика с осью ох	
координаты точек пересечения графика с осью оу	
промежутки, на которых функция принимает положительные значения	
промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	
промежутки возрастания	
промежутки убывания	

точки минимума	
минимумы функции	
точки максимума	
максимумы функции	

4. Заполните таблицу для функции косинуса по графику



область определения	
область значений	
чётность, нечётность	
наименьший положительный период	
координаты точек пересечения графика с осью ох	
координаты точек пересечения графика с осью оу	
промежутки, на которых функция принимает положительные значения	
промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	
промежутки возрастания	
промежутки убывания	
точки минимума	
минимумы функции	
точки максимума	

максимумы функции	

Практическая работа № 17

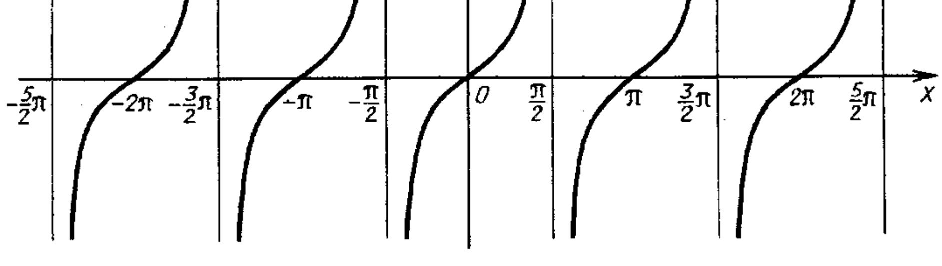
Тема: Свойства тригонометрических функций (тангенс, котангенс).
Цели:
- познакомиться с общей схемой исследования тригонометрических функций, видом графиков тангенса и котангенса;
- научиться проводить по общей схеме исследование функций тангенса и котангенса, строить графики данных функций, если известны их свойства

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

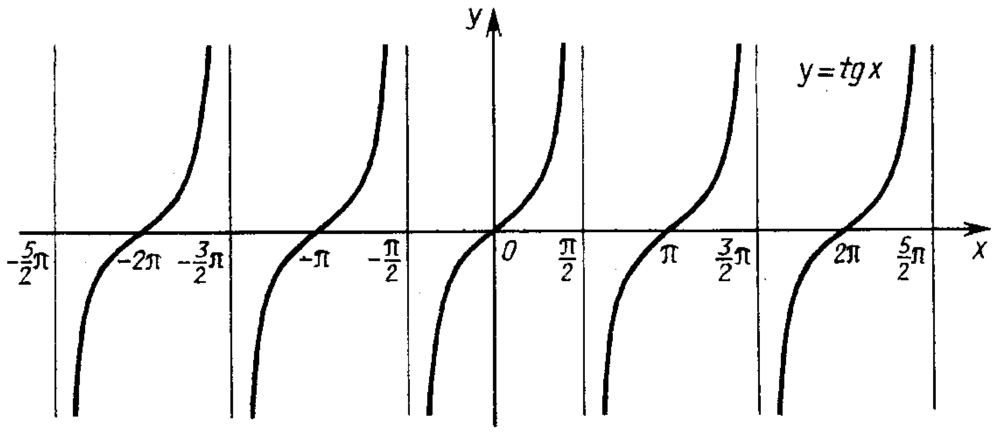
1. Запишите определения функции тангенс и котангенс.
2. Познакомьтесь со схемой исследования тригонометрических функций, исследуйте функции тангенса и котангенса по схеме:
1. область определения;
2. область значений;
3. чётность, нечётность;
4. наименьший положительный период;
5. координаты точек пересечения графика с осью ох;
6. координаты точек пересечения графика с осью оу;
7. промежутки, на которых функция принимает положительные значения;
8. промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения;
9. промежутки возрастания;
10. промежутки убывания;
11. точки минимума;
12. минимумы функции;
13. точки максимума;
14. максимумы функции.
3. Заполните таблицу для функции тангенса по графику



област	
област	
чётнос	
наименьший положительный	

период	
координаты точек пересечения графика с осью ох	
координаты точек пересечения графика с осью оу	
промежутки, на которых функция принимает положительные значения	
промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	
промежутки возрастания	
промежутки убывания	
точки минимума	
минимумы функции	
точки максимума	
максимумы функции	

4. Заполните таблицу для функции котангенса по графику



область определения	
область значений	
чётность, нечётность	
наименьший положительный период	
координаты точек	

пересечения графика с осью ох	
координаты точек пересечения графика с осью оу	
промежутки, на которых функция принимает положительные значения	
промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения	
промежутки возрастания	
промежутки убывания	
точки минимума	
минимумы функции	
точки максимума	
максимумы функции	

Практическая работа № 18

Тема: Преобразование графиков тригонометрических функций.

Цели:
- Закрепить навыки преобрадования графиков тригонометрических функций.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Справочный материал
Правила преобразования графиков функции

1. Для построения графика функции y=f(x)+b, где b – постоянное число, надо перенести график f на вектор (0; b) вдоль оси ординат.

2. Для построения графика функции y=kf(x) надо растянуть график функции y=f(x) в k раз вдоль оси ординат.

Замечание: Если 0<│k│<1, то растяжение с коэффициентом k называют сжатием. Если k<0, то для построения графика функции y=kf(x) надо сначала растянуть график в │k│раз, а затем отразить его симметрично относительно оси абсцисс.

3. График функции y=f(x-a) получается из графика f переносом (вдоль оси абсцисс) на вектор (a;0). Обратите внимание, что если a>0, то вектор (a;0) направлен в положительном направлении оси абсцисс, а при a<0 – в отрицательном.

4. Для построения графика функции y=f$\left(\frac{x}{к}\right)$ надо подвергнуть график функции f растяжению с коэффициентом k вдоль оси абсцисс.

Схемы решения.

1)y = sin x + 2.

Строим график y = sin x. Каждую точку графика поднимаем вверх на 2 единицы (нули тоже).

2)y = cos x – 3.

Строим график y = cos x. Каждую точку графика опускаем вниз на 3 единицы.

3)y = cos (x - π /2)

Строим график y = cos x. Все точки сдвигаем на п/2 вправо.

4)y = 2 sin x.

Строим график y = sin x. Нули оставляем на месте, верхние точки поднимаем в 2 раза, нижние опускаем на столько же.

Задание:

1. Построить график функции $y = \cos 3x$
2. Построить график функции $y = \sin\frac{x}{2}$
3. Построить график функции $y = \sin 2x$.

Практическая работа № 19

Тема: Степенная функция и её свойства.

Цели:
- Познакомиться с понятием степенной функции, её свойствами и графиком, научиться строить графики степенной функции.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Справочный материал

Степенная функция, ее свойства и график

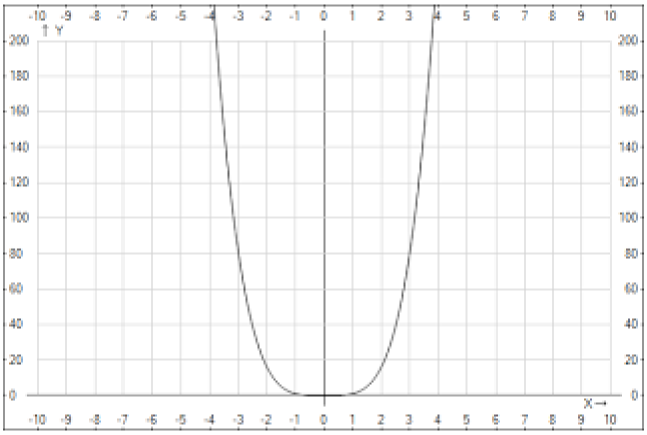
$y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = 1/x$ и т. д. Все эти функции являются частными случаями степенной функции, т. е. функции $y = x^p$, где p - заданное действительное число. Свойства и график степенной функции существенно зависит от свойств степени с действительным показателем, и в частности от того, при каких значениях x и p имеет смысл степень x^p. Перейдем к подобному рассмотрению различных случаев в зависимости от
показателя степени p.

1. Показатель $p = 2n$ - четное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n - натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - все действительные числа, т. е. множество R;
- множество значений - неотрицательные числа, т. е. у больше или равно 0;
- функция $y = x^{2n}$ четная, так как $x^{2n} = (-x)^{2n}$
- функция является убывающей на промежутке $x < 0$ и возрастающей на промежутке $x > 0$.

График функции $y = x^{2n}$ имеет такой же вид, как например график функции $y = x^4$.

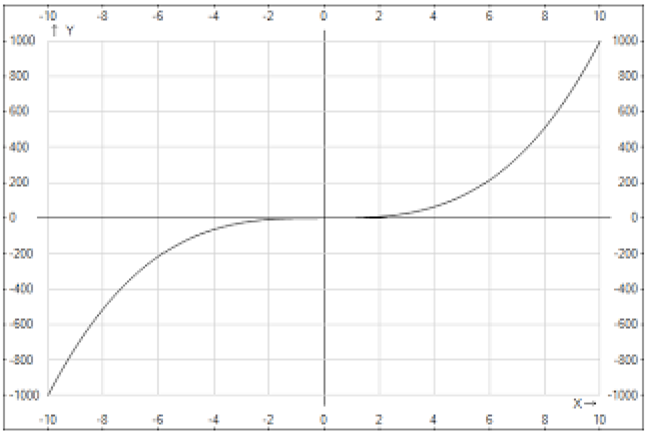


2. Показатель $p = 2n - 1$ - нечетное натуральное число

В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R;
- множество значений - множество R;
- функция $y = x^{2n-1}$ нечетная, так как $(-x)^{2n-1} = x^{2n-1}$;
- функция является возрастающей на всей действительной оси.

График функции $y = x^{2n-1}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = x^3$.

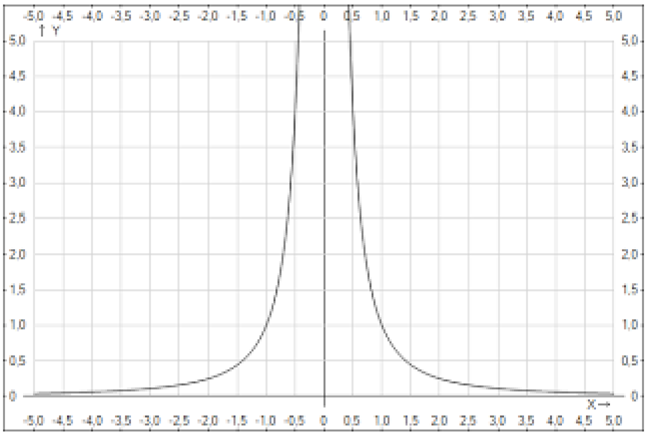


3. Показатель $p = -2n$, где n - натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = 1/x^{2n}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R, кроме x = 0;
- множество значений - положительные числа y>0;
- функция y = $1/x^{2n}$ четная, так как $1/(-x)^{2n} = 1/x^{2n}$;
- функция является возрастающей на промежутке x0.

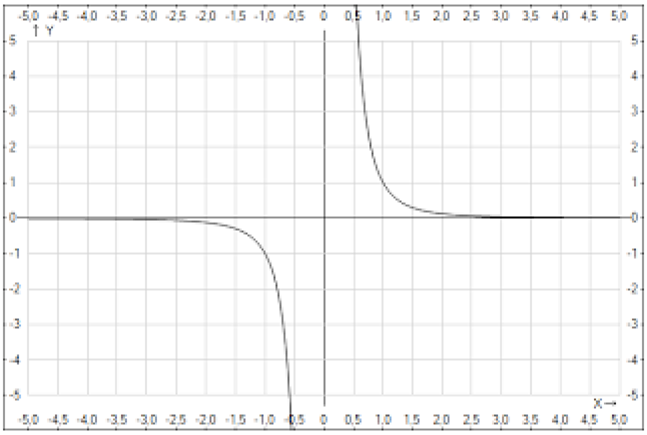
График функции y = $1/x^{2n}$ имеет такой же вид, как, например, график функции y = $1/x^2$.



4. Показатель $p = -(2n-1)$, где n - натуральное число.
В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)}$ обладает следующими свойствами:

- область определения - множество R, кроме x = 0;
- множество значений - множество R, кроме y = 0;
- функция $y = x^{-(2n-1)}$ нечетная, так как $(-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)}$;
- функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$.

График функции $y = x^{-(2n-1)}$ имеет такой же вид, как, например, график функции $y = 1/x^3$.



Задание:

1. Постройте график показательной функции $y=2^x$
2. Постройте график показательной функции $y=(^1/_2)^x$
3. Решить графически уравнение: $3^x=4-x$

Практическая работа № 20

Тема: Показательная функция и её свойства.

Цели:
- Познакомиться с понятием показательной функции, её свойствами и графиком, научиться строить графики показательной функции.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Справочный материал

1. Функция, заданная формулой вида $y=a^x$, где a — некоторое положительное число, не равное единице, называется показательной.

2. Функция $y=a^x$ при $a>1$ обладает следующими свойствами (см. рис. 203):

а) область определения — множество всех действительных чисел;

б) множество значений — множество всех положительных чисел;

в) функция возрастает;

г) при $x=0$ значение функции равно 1;

д) если $x>0$, то $a^x>1$;

е) если $x<0$, то $0<a^x<1$.

3. Функция $y=a^x$ при $0<a<1$ обладает следующими свойствами (см. рис. 204):

а) область определения $D(f)=\boldsymbol{R}$;

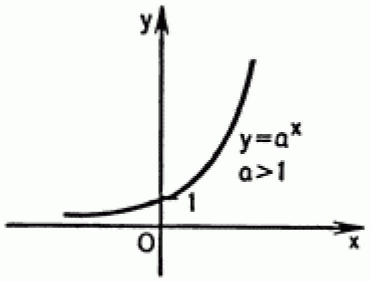
б) множество значений $E(f)=\boldsymbol{R}_+$;

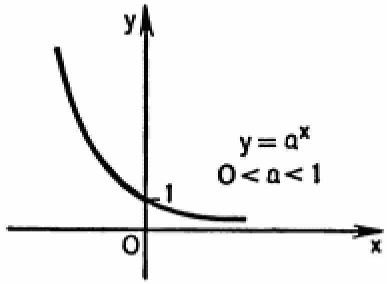
в) функция убывает;

г) при $x=0$ значение функции равно 1;

д) если $x>0$, то $0<a^x<1$;

е) если $x<0$, то $a^x>1$.





УПРАЖНЕНИЯ С РЕШЕНИЯМИ

Изобразить схематически график функции: 1) $y=2^x$; 2) $y=-3\cdot 2^x$; 3) $y=2^{|x|}$; 4) $y=(\mathrm{tg}\,60°)^{1-x}$; 5) $y=3^{|x-1|}$.

Решение. 1) $y=2^x$. Так как $a=2>1$, то функция возрастающая. Если $x=0$, то $y=2^0=1$. График функции $y=2^x$ изображен на рисунке 205.

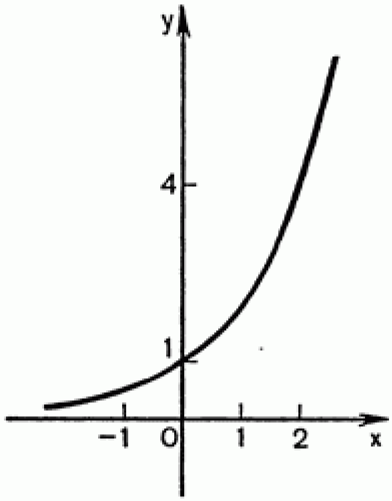
2) $y=-3\cdot 2^x$. Так как $a=2>1$, то функция $y=2^x$ возрастающая. График ее изображен штриховой линией на рисунке 206. График функции $y=-3\cdot 2^x$ симметричен относительно оси Ox графику функции $y=3\cdot 2^x$. Поэтому сначала строим график функции $y=3\cdot 2^x$ (см. рис. 206), а затем получаем график функции $y=-3\cdot 2^x$ (рис. 206).

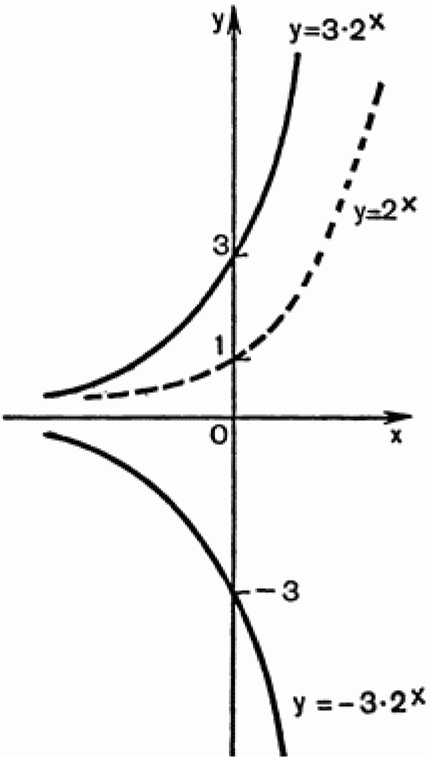
3) $y=2^{|x|}$. Если $x\geqslant 0$, то $y=2^x$. График функции $y=2^x$ при $x\geqslant 0$ построен на рисунке 207.

Поскольку функция $y=2^{|x|}$ четная, то ее график симметричен относительно оси Oy. График функции $y=2^{|x|}$ изображен на рисунке 208.

4) $y=(\mathrm{tg}\,60°)^{1-x}$. Здесь $a=\mathrm{tg}\,60°=\sqrt{3}$. Запишем данную функцию в виде

$$y=(\sqrt{3})^{1-x}=\sqrt{3}\cdot(\sqrt{3})^{-x}=\sqrt{3}\cdot\frac{1}{(\sqrt{3})^x}=\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x.$$





Задание

1. Изобразите схематически график функции:

А. 1) $y=2(\sqrt{2})^x$; 2) $y=-2^x$; 3) $y=(\sin 90°)^x$; 4) $y=17^{x-1}$.

Б. 1) $y=2^{|x|-1}$; 2) $y=-2^{|x|-1}$; 3) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^x$.

В. 1) $y=(\mathrm{tg}\,135°)^x$; 2) $y=2^{\sqrt{-\sin^2 x}}$.

2. Укажите область значений функции: 1) 2^x; 2) $0{,}4^x$; 3) 1^x; 4) $0{,}65^x$; 5) $3^{|x|}$; 6) 0^x; 7) 2^x-2; 8) $3-0{,}4^x$.

Практическая работа № 21

Тема:Логарифмическая функция и её свойства.

Цели:
- Познакомиться с понятием логарифмической функции функции, её свойствами и графиком, научиться строить графики логарифмической функции.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Задание: Изучите теоретический материал, напишите конспект.
Функция $y = \log_a x$ **(где** $a > 0$, $a \neq 1$**)** называется логарифмической.
Построение графиков. График логарифмической функции $\log_a x$ можно построить, воспользовавшись тем, что функция $\log_a x$ обратна показательной функции $y = a^x$. Поэтому достаточно построить график функции $y = a^x$, а затем отобразить его симметртрично относительно прямой $y = x$.

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$:

1. D(f) = (0; +∞∞);
2. не является ни четной, ни нечетной;
3. возрастает на (0; +∞∞);
4. не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. E(f) = (-∞∞;+ ∞∞);
8. выпукла вверх;

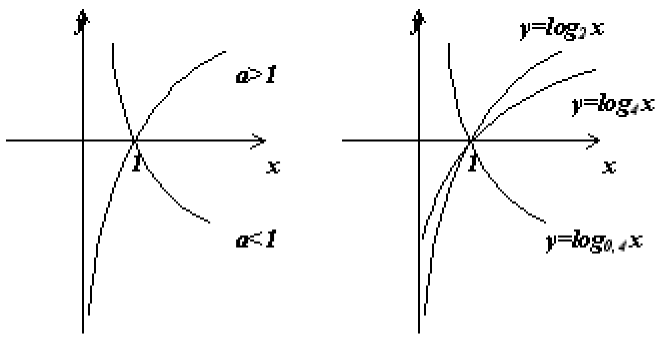
Свойства функции $y = \log_a x$, $0 < a < 1$:

1. D(f) = (0;+∞∞);
2. не является ни четной, ни нечетной;
3. убывает на (0; +∞∞);
4. не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5. нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. E(f) = (-;∞∞+ ∞∞);
8. выпукла вниз;

Свойства функции y = ln x *:*

1. D(f) = (0; +∞∞);
2. не является ни четной, ни нечетной;
3. возрастает на {0; +∞∞);
4. не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. E(f) = (-∞∞;+ ∞∞);
8. выпукла вверх;
9. дифференцируема.

$y=log_a x$



Задание: Постройте графики функций и запишите исследование по графику: y= $\log_5 x$; $y = \lg x$;;
$y = \log_{\frac{1}{2}} x$; б) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

Практическая работа № 22

Тема: Решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Цели:
- Закрепить навыки решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:

1. Используя справочный материал и образцы решения решите тригонометрические уравнения и неравенства:

1. а) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *б)* $tg\, x = -2{,}5$; *в)* $\sin x = -\frac{1}{2}$; *г)* $2\cos x + 1 = 0$;

д) $\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. а) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $tg\, x = 2$; *г)* $2\cos x + \sqrt{3} = 0$;

д) $\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

3. *а)* $\sin x < \frac{1}{2}$; *б)* $tg\, x = 1$; *в)* $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$; *г)* $\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$;

д) $\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

4 *а)* $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* $\cos x < -\frac{1}{2}$; *в)* $ctg\, x = -\frac{2}{5}$; *г)* $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

д) $\sin 4x = 0$

А 1: Решите уравнение: $\sin\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

1) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$; 2) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \ k \in Z$;

3) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in Z$; 4) $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{2} + 2\pi k$.

А 2: Решите уравнение: $\sqrt{2}cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

1) $\pm\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; 2) $\pm\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$;

3) $-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 4\pi k,\ k \in Z$; 4) $\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z$.

Формулы для решения тригонометрических уравнений

1) $\sin t = a,\ a \in [-1;1]$

$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

$\sin t = 1 \quad t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

$\sin t = -1 \quad t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in Z$

$\sin t = 0 \quad t = \pi n, \quad n \in Z$

2) $\cos t = a,\ a \in [-1;1]$

$t = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

$\cos t = 1 \quad t = 2\pi n, \quad n \in Z$

$\cos t = -1 \quad t = \pi + 2\pi n, \quad n \in Z$

$\cos t = 0 \quad t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in Z$

3) $tg\, t = a,\ a \in R$

$t = arctg\, a + \pi n, \quad n \in Z$

$arctg(-a) = -arctg\, a$

Основные формулы

$\sin^2 x+\cos^2 x=1, \quad x\in R.$

$tg\, x=\dfrac{\sin x}{\cos x}, \quad x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

$ctg\ x=\dfrac{\cos x}{\sin x}, \quad x\neq \pi k,\ k\in Z.$

$1+tg^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x\neq \dfrac{\pi}{2}+\pi k, \quad k\in Z.$

$1+ctg^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x\neq \pi k, \quad k\in Z.$

$tg\ x\cdot ctg\ x=1, \quad x\neq \dfrac{\pi k}{2}.$

Дополнительные формулы

$\sin^2 x=1-\cos^2 x, \quad x\in R.$

$\cos^2 x=1-\sin^2 x, \quad x\in R.$

Формулы двойного угла

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x$

$tg\ 2x=\dfrac{2tg\ x}{1-tg^2 x}$

Образцы решения тригонометрических уравнений

Пример 1. Решите уравнение $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $a=\dfrac{1}{2}$, -1<$\dfrac{1}{2}$<1, то по формуле

$x=\pm\arccos\ a+2\pi n, \quad n\in Z$ запишем $x=\pm\arccos\dfrac{\pi}{3}+2\pi n\ , n\in Z$

Т.к. $\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, то $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$

Пример 2. Решите уравнение $\cos x=-0{,}2756.$

По формуле $x=\pm\arccos\ a+2\pi n, \quad n\in Z$

запишем $x=\pm\arccos(-0{,}2756)=2\pi n, n\in Z.$

Значение $\arccos(-0{,}2756)$ находим с помощью калькулятора; оно приближенно равно 1,8500. Итак, $x = \pm x_0 + 2\pi n, n \in Z,$ где $x_0 \approx 1{,}8500.$

Ответ: $x = \pm x_0 + 2\pi n, n \in Z,\ x_0 \approx 1{,}8500.$

Пример 3. Решите уравнение $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

По формуле $x = \pm\arccos\, a + 2\pi n, \quad n \in Z$ запишем $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z,$

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ т.е. $2x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

$2x = \pm\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ делим правую и левую часть на 2, получаем

$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z.$

Пример 4. Решите уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, то

по формуле $x = (-1)^k \arcsin\, a + \pi k, \quad k \in Z$ запишем

$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, k \in Z,$ т.к. $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, то

$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Пример 5. Решите уравнение $\sin x = 0{,}3714.$

Согласно формуле $x = (-1)^k \arcsin\, a + \pi k, \quad k \in Z$

$x = (-1)^k \arcsin 0{,}3714 + \pi k, k \in Z.$

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin 0{,}3714 + \pi k, k \in Z.$

Пример 6. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-1 < -\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, то по формуле $x = (-1)^k \arcsin\, a + \pi k, \quad k \in Z$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in Z.$

Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$, имеем $-\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi k,\ k \in Z$

$-\frac{x}{2}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{10}+\pi k,\ k\in Z$ умножим правую и левую часть равенства на -2

$x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in \mathrm{Z}.$

Ответ: $x=\frac{\pi}{5}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in \mathrm{Z}.$

Пример 7. Решите уравнение $tg\ x=5{,}177.$

Из формулы $x=arctg\ a+\pi n,\quad n\in Z$ следует, что $x=arctg\ 5{,}177+\pi n, n\in \mathrm{Z}.$

Ответ: $x=arctg\ 5{,}177+\pi n, n\in \mathrm{Z}.$

Пример 9. Решите уравнение $ctgx=-\sqrt{3}.$

Это уравнение равносильно уравнению $tgx=-\frac{1}{\sqrt{3}}$, которое решаем с помощью формулы

$x=arctg\ a+\pi n,\quad n\in Z$, $\quad x=arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi n, n\in \mathrm{Z},$

$x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \mathrm{Z}.$

Ответ: $x=-\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in \mathrm{Z}.$

Практическая работа № 23

Тема: Решение показательных уравнений и неравенств.

Цель:

- закрепить навыки решения показательных уравнений и неравенств.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Вариант 1	Вариант 2
Решите показательное уравнение:	Решите показательное уравнение:
$3^{7x+6}=27$;	$6^{10x-1}=36$;
$2^{5x-6}=8$;	$3^{4x+5}=81$;
$100^{2x+1}=0{,}1$;	$10^{3x+1}=0{,}001$;
$49^{x+1}=\left(\frac{1}{7}\right)^x$;	$2^{7-5x}=\left(\frac{1}{8}\right)^{2x+1}$;
$27^{1-x}=\frac{1}{81}$;	$25^{1-3x}=\frac{1}{125}$;
$36\cdot 216^{3x+1}=1$;	$9\cdot 81^{1-2x}=27^{2-x}$;
$7^{x+1}+14\cdot 7^x=3$;	$3^{x+1}+15\cdot 3^x=2$;

$3^{x+2}-5\cdot 3^{x}=36$;
$2^{x-1}+2^{x+2}=36$.
Решите показательное неравенство:
$2^{x}<\frac{1}{8}$;
$(0,1)^{x+1}\geq 100$;
$7^{2x-9}>7^{3x-6}$;
$27^{1+2x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{2+x}$;
$3^{x+2}-5\cdot 3^{x}<36$;
$8\cdot 2^{x-1}-2^{x}>48$;
$11^{2x^2+3x}\leq 121$;
$\left(\frac{4}{5}\right)^{x^2}<\left(\frac{5}{4}\right)^{3x-4}$.

$3^{x+2}+3^{x}=810$;
$8\cdot 2^{x-1}-2^{x}=48$.
Решите показательное неравенство:
$3^{x}>\frac{1}{27}$;
$(0,1)^{2x-3}\leq 10$;
$9^{x-1}\leq 9^{-2x+8}$;
$\left(\frac{1}{4}\right)^{2+3x}<8^{x-1}$;
$7^{x+2}-14\cdot 7^{x}=5$;
$9\cdot 3^{x-1}+3^{x}<36$;
$14^{x^2}\leq 196$
$\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2}>\left(\frac{4}{3}\right)^{2x-3}$.

Образцы решения показательных уравнений и неравенств

Рассмотрим простейшее показательное уравнение $a^x=b$ (1), где a >0 и a≠1. Область значения функции $y=a^x$–множество положительных чисел. Поэтому в случае b<0 или b=0 уравнение не имеет решений.
Пусть b>0.Функция y=a на промежутке (–∞;∞) возрастает при a>1 (убывает при 0<a<1) и принимает все положительные значения. Применяя теорему о корне (*Пусть функция f возрастает (или убывает)на промежутке I, число a – любое из значений, принимаемых функцией на этом промежутке. Тогда уравнение f(x)=a имеет единственный корень в промежутке I*) получаем, что уравнение (1) при любом положительном a, отличном от 1, и b>0 имеет единственный корень. Для того чтобы его найти, надо b представить в виде $b=a^c$. Очевидно, что *c* является решением уравнения $a^x=a^c$.

Показательные уравнения

Пример 1.

Решите уравнение $7^{x-2}=\sqrt[3]{49}$

Заметим, что $49=7^2$, а $\sqrt[3]{49}=7^{\frac{2}{3}}$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $7^{x-2}=7^{\frac{2}{3}}$.

Следовательно, корнями данного уравнения являются такие числа x, для которых $x-2=\frac{2}{3}$,

т.е. $x=2\frac{2}{3}$.

Ответ: $x=2\frac{2}{3}$.

Пример 2*.*
Решите уравнение $5^{x-2x-1}=25$.

Перепишем его в виде $5^{x^2-2x-1}=5^2$. Корнями этого уравнения являются такие числа x, для которых $x^2-2x-1=2$.
Приходим к квадратному уравнению, корни которого $x_1=3$ и $x_2=-1$.
Ответ: $x_1=3$ и $x_2=-1$.

Пример 3.
Решите уравнение $6^{x+1}+35\cdot 6^{x-1}=71$.
Заметим, что $6^{x+1}=36\cdot 6^{x-1}$. Поэтому данное уравнение можно записать в виде $36\cdot 6^{x-1}+35\cdot 6^{x-1}=71$

$71\cdot 6^{x-1}=71$, разделим правую и левую части на число 71

$6^{x-1}=1$,

$6^{x-1}=6^{0}$,

$x-1=0$

$x=1$.

Ответ: x=1.
Пример 4.
Решите уравнение $4^{x}-5\cdot 2^{x}+4=0$.
Сделаем замену переменной $t=2^{x}$.
Заметим, что $4^{x}=(2^{x})^{2}=t^{2}$. Поэтому данное уравнение принимает вид $t^{2}-5t+4=0$.
Найдем решения этого квадратного уравнения: $t_1=1$ и $t_2=4$. Решая уравнения $2^{x}=1$ и $2^{x}=4$, получаем x=0 и x=2.
Ответ: x=0, x= 2.

Показательные неравенства
Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве функции $y=a^{x}$: эта функция возрастает при a>1 и убывает при 0<a<1.
Пример 1.
Решите неравенство $0{,}5^{7-3x}<4$.
Пользуясь тем, что $0{,}5^{-2}=\left(\frac{5}{10}\right)^{-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^{2}=4$, перепишем заданное неравенство в виде $0{,}5^{7-3x}<0{,}5^{-2}$. Показательная функция $y=0{,}5^{x}$ убывает (основание 0<0,5< 1). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству 7–3x> –2 (знак неравенства необходимо поменять на противоположный), откуда -3x> -2-7,

-3x>-9,

x<3, т.е. $x\in(-\infty;3)$.

Ответ: $x\in(-\infty;3)$.
Пример 2.
Решите неравенство $6^{x^2+2x}>6^{3}$.
Показательная функция $y=6^{x}$ возрастает (основание 6>1). Поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$x^2+2x>3$

$x^2+2x-3>0$

Решаем данное неравенство методом интервалов

$f(x)=x^2+2x-3$

$f(x)=0$

$x^2+2x-3=0$

$x_1=-3\ и\ x_2=1$

Данные две точки разбивают область определения функции на три интервала, определяем знак функции в каждом интервале и выбираем интервалы со знаком плюс. Получаем $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

Практическая работа № 24

Тема: Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Цель:

- закрепить навыки решения логарифмических уравнений и неравенств.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

1.Решите логарифмические уравнения:

$\log_4 x=2$

$\log_3 (x+1)=3$

$\log_5 x=-1$

$\log_2 x=0$

$\log_{0,2} (5+2x)=1$

$\log_2 (x-5)+ \log_2 (x+2)=3$

$\log_2 (1-x)+ \log_2 (3-x)=3$

$\log_{0,5} (6+5x)=1$

$\log_3 (x-2)+\log_3 (x+6)=2$

2.Решите логарифмические неравенства:

$\log_2 x>3$

$\log_{0,2} x<1$

$\log_3 (x-2) \le 2$

$\log_{\frac{1}{5}} (4-3x) \ge -1$

$\lg (3x-4) < \lg (2x+1)$

$\log_4 x<2$

$\log_{0,7} x \ge 1$

$\log_2 (x-3) >3$

$\log_{\frac{1}{3}} (x-1) \ge -2$

$\lg (2x+3) > \lg (x+1)$

Решение логарифмических уравнений и неравенств.

Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение $\log_a x = b$. Логарифмическая функция возрастает или убывает на промежутке $(0;\infty)$ и принимает на этом промежутке все действительные значения. По теореме о корне (*Пусть функция f возрастает (или убывает)на промежутке I, число а – любое из значений, принимаемых функцией на этом промежутке. Тогда уравнение f(x)=a имеет единственный корень в промежутке I*) отсюда следует, что для любого *b* данное уравнение имеет и притом только одно решение. Из определения логарифма числа сразу следует, что a^b является таким решением.

Теорема: *Если* $\log_a x_1 = \log_a x_2$, *где* $a > 0,\ a \neq 0,\ x_1 > 0,$ *то* $x_1 = x_2$.

Образцы решения логарифмических уравнений

Пример 1

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$$

Данному уравнению удовлетворяют те значения x, для которых выполнено равенство:

$x^2+4x+3=2^3$

$x^2+4x+3=8$

$x^2+4x-5=0$

Решая данное квадратное уравнение получаем:

$x_1=1,\quad x_2=-5$

Ответ: $x_1=1,\ x_2=-5$.

Пример 2

$$\log_5(2x+3) = \log_5(x+1)$$

ОДЗ: $2x+3>0$

$x+1>0$

$2x+3=x+1$

$2x-x=1-3$

$x=-2$

Проверка:

$x=-2$

$2\cdot(-2)+3>0$ *(неверно)*

Ответ: корней нет

Пример 3

$\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$

$ОДЗ: x+1 > 0$

$x+3 > 0$

По свойству логарифма верно равенство

$\log_2(x+1)(x+3) = 3$

По определению логарифма получаем

$(x+1)(x+3) = 2^3$

$(x+1)(x+3) = 8$

$x^2 + 4x + 3 = 8$

$x^2 + 4x - 5 = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = -5$

Проверка:

$x_1 = 1$

$1+1 > 0$ (*верно*)

$1+3 > 0$ (*верно*)

$x_2 = -5$

$-5+1 > 0$ (*неверно*)

Ответ: $x = 1$

Пример 4

$\log_2(1-x) = 3 - \log_2(3-x)$

$ОДЗ: 1-x > 0$

$3-x > 0$

Перенесем логарифм из правой части в левую

$\log_2(1-x) + \log_2(3-x) = 3$

По свойству логарифма верно равенство

$\log_2(1-x)(3-x) = 3$

По определению логарифма получаем

$(1-x)(3-x) = 2^3$

$(1-x)(3-x) = 8$

$x^2 - 4x + 3 = 8$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x_1 = -1,\ x_2 = 5$

Проверка :

$x_1 = -1$

$1 - (-1) > 0$ (*верно*)

$1 - (-3) > 0$ (*верно*)

$x_2 = 5$

$1 - 5 > 0$ (*неверно*)

Ответ : $x = -1$

Пример 5

$\lg\ (2x^2 - 4x + 12) = \lg\ x + \lg(x + 3)$

ОДЗ : $2x^2 - 4x + 12 > 0$

$x + 3 > 0$

$x > 0$

По свойству логарифма верно равенство

$\lg\ (2x^2 - 4x + 12) = \lg\ (x \cdot (x + 3))$

$\lg\ (2x^2 - 4x + 12) = \lg\ (x^2 + 3x)$

$2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x$

$2x^2 - x^2 - 4x - 3x + 12 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$x_1 = 3,\ x_2 = 4$

Проверка :

$x_1 = 3$

$2 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 + 12 > 0$ (*верно*)

$3 + 3 > 0$ (*верно*)

$3 > 0$ (*верно*)

$x_2 = 4$

$2 \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 12 > 0$ (*верно*)

$4 + 3 > 0$ (*верно*)

$4 > 0$ (*верно*)

Ответ : $x_1 = 3,\ x_2 = 4$

Образцы решения логарифмических неравенств

Пример 1

$\log_2 x < 3$

$3 = \log_2 2^3 = \log_2 8$

$\log_2 x < \log_2 8,\ т.к.\ a = 2 > 1,\ то\ функция\ y = \log_2 x\ определена\ при\ x > 0\ и\ возрастает,$

$то \begin{cases} x \succ 0, \\ x \prec 8 \end{cases}$

x $\in$ *(0;8)*

Ответ: x $\in$ *(0;8)*

Пример 2

$\log_{\frac{1}{3}} x \le -2$

$-2 = \log_{\frac{1}{3}} 9$

$\log_{\frac{1}{3}} x \le \log_{\frac{1}{3}} 9,\ т.к.\ a = \frac{1}{3},\ \ 0 < \frac{1}{3} < 1,\ то\ функция\ y = \log_{\frac{1}{3}} x\ определена\ при\ x > 0\ и\ убывает,$

$то \begin{cases} x \succ 0, \\ x \ge 9 \end{cases}$

x $\in$ *[9;* ∞*)*

Ответ: x $\in$ *[9;* ∞*)*

Пример 3

$\lg\ (x+1) \le 2$

$2 = \lg 100$

$\lg(x+1) \le \lg\ 100,\ т.к.\ a = 10,\ \ 10 > 1,\ то\ функция\ y = \lg(x+1)\ определена\ при\ x+1 > 0\ и$

$возрастает,$

$то \begin{cases} x+1 > 0, \\ x+1 \le 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -1, \\ x \le 99 \end{cases}$

x $\in$ (*-1;99*]

Ответ: x $\in$ (*-1;99*]

Практическая работа №25

Тема: Решение иррациональных уравнений.

Цель:

- закрепить навыки решения иррациональных уравнений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта

Ход работы:

Решите иррациональные уравнения, используя справочный материал:

Первый уровень	Первый уровень

Вариант I	Вариант II
Решите уравнения	Решите уравнения
1) $\sqrt{x}=4$	1) $\sqrt{x}=7$
2) $\sqrt{x}+16=0$	2) $25+\sqrt{x}=0$
3) $x-\sqrt{x}-6=0$	3) $7\sqrt{x}-2x+15=0$
4) $\sqrt{x^2+x-2}=2$	4) $\sqrt{x^2+3x+5}=3$
5) $\sqrt{7x+1}=2\sqrt{x+4}$	5) $\sqrt{5x-1}=\sqrt{3x+19}$
6) $\sqrt{x+2}-\dfrac{2}{\sqrt{x+2}}=1$	6) $10\sqrt{x^2-x-1}+\dfrac{3}{\sqrt{x^2-x-1}}=13$
7) $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$	7) $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x+2}=1$

Второй уровень	Второй уровень
Вариант I	**Вариант II**
Решите уравнения	Решите уравнения
1) $\sqrt{x+1}=3$	1) $\sqrt{3x-1}=1{,}2$
2) $\sqrt{2x+3}=x$	2) $\sqrt{6-x}=x$
3) $\sqrt{-4x^2-16}=2$	3) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3}=0$
4) $x+1=\sqrt{8-4x}$	4) $\sqrt{4x^2-9x+2}=x-2$
5) $\sqrt{2x}+\sqrt{x-3}=-1$	5) $\sqrt{-3x-x^2}=9$
6) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x+1}=2$	6) $\sqrt{x+13}-\sqrt{x+1}=2$
7) $\sqrt{1-2x}-\sqrt{13+x}=\sqrt{x+4}$	7) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}$
8) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{6}$	8) $\sqrt{4+x}\cdot\sqrt{5-x}=2\sqrt{2}$
9) $\sqrt{5+\sqrt{x-1}}=3$	9) $\sqrt{7-\sqrt{x+1}}=2$
10) $\sqrt{\sqrt{x+13}}=\sqrt{17-3\sqrt{x}}$	10) $\sqrt{17+\sqrt{x}}=\sqrt{20-2\sqrt{x}}$

Третий уровень	Третий уровень
Вариант I	**Вариант II**
Решите уравнения	Решите уравнения
1) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-3}=0$	1) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}=-2$
2) $\sqrt{2x}-7x=-52$	2) $2x+\sqrt{4x-8}=\dfrac{7}{8}$
3) $\sqrt{2x+7}+\sqrt{3x-18}=\sqrt{7x+1}$	3) $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\dfrac{7}{\sqrt{x-3}}$
4) $x(x+1)+3\sqrt{2x^2+6x+5}=25-2x$	4) $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x$
5) $\sqrt{x^2+4x+4}-\sqrt{x^2-12x+36}=8$	5) $\sqrt{x^2+4x+4}+\sqrt{x^2-12x+36}=16$
6) $x^2-8(x+1)\sqrt{x}+18x+1=0$	6) $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}}+\sqrt{x-\sqrt{6x-9}}=\sqrt{6}$

Справочный материал

Иррациональными называют уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня или под знаком операции возведения в дробную степень.
Все корни четной степени, входящие в уравнения, являются арифметическими. Другими словами, если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень также равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то и значение корня положительно.
Все корни нечетной степени, входящие в уравнение, определены при любом действительном значении подкоренного выражения. При этом корень отрицателен, если подкоренной выражение отрицательно; равен нулю, если подкоренное выражение равно нулю; положителен, если подкоренное выражение положительно.
Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$ являются возрастающими на своей области определения.
Используя эти свойства в некоторых случаях можно установить, что уравнение не имеет решения, не прибегая к преобразованиям.
При решении иррациональных уравнений используются два основных метода:
1) возведение обеих частей уравнения в одну и туже степень;
2) введение новых переменных. Но иногда приходится применять и искусственные приемы решения таких уравнений.

Методы решения иррациональных уравнений

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = b \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = b^2$ при $b \geq 0$.
Если $b < 0$, то уравнение не имеет решений.
Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g^2(x) \end{cases}$.

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$ или $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

Пример 1. Решим уравнение $\sqrt{x^2 - 5} = 2$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат и получим $x^2 - 5 = 4$**, откуда следует ,что** $x^2 = 9$**,т.е. x=3 или x= -3.**

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. Действительно ,при подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства.

$\sqrt{3^2 - 5} = 2$ **и** $\sqrt{(-3\ )^2 - 5} = 2$

Следовательно, x=3 и x=-3$\rightarrow$**решения данного уравнения.**

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{x} = x - 2$

Возведя в квадрат обе части уравнения получим x=$x^2 - 4x + 4$

После преобразований приходим к квадратному уравнению $x^2 - 5x + 4 = 0$**,корни которого x=1 и x=4. Проверим, являются ли найденные числа решениями данного уравнения . При подстановке в него числа 4 получаем верное равенство** $\sqrt{4} = 4 - 2$**, т .е 4-решение данного уравнения . При подстановке же числа 1 получаем в первой части -1,а в левой части число 1. Следовательно, 1 не является решением уравнения; говорят, что это <u>посторонний корень</u>, полученный в результате принятого способа решения.**

Ответ: x=4

Мы видим ,что при решении иррациональных уравнений полученные решения требуют проверки ,потому ,например ,что неверное равенство при возведении в квадрат может быть верное равенство. В самом деле ,неверное равенство 1= -1 при возведении в квадрат дает верное равенство $1^2 = (-1)^2$

Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$ **.**

Возведем обе части этого равнения в квадрат : $x^2 - 2 = x$ **,откуда получаем уравнение** $x^2 - x - 2 = 0$ **,корни которого х= -1 и х=2. Сразу ясно ,что число -1 не является корнем данного уравнения ,так как обе части его не определены при х=-1. При подстановке в уравнение числа 2 получаем верное равенство** $\sqrt{2^2 - 2 = \sqrt{2}}$ **.**
Следовательно , решением данного уравнения является только число 2.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$ **.**

Возводя в квадрат обе части этого уравнения , получаем х-6=4-х, 2х=10,х=5. Подстановкой убеждаемся ,что число 5 не является корнем данного уравнения. Поэтому уравнение не имеет решений.

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения ,используя равносильные переходы.

Практическая работа №26

Тема: Метод интервалов.

Цель:
- закрепить навыки решения неравенств методом интервалов

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник «Алгебра и начала анализа» 10-11кл под ред. А.Н.Колмагорова

Ход работы:

1. Запишите определение непрерывной функции.
2. Рассмотрите и запишите примеры решения неравенства методом интервалов.

Пример 1

$(x-1)(x-4)<0$

Решим данное неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x)=(x-1)(x-4),$

приравняем функцию к нулю $f(x)=0,$

$(x-1)(x-4)=0$

$x-1=0$ *или* $x-4=0$

$x=1$ *или* $x=4$

Область определения функции вся числовая прямая.

Данные две точки разбивают область определения функции на три интервала, в ка
из которых функция непрерывна и не обращается в нуль. Определяем знак функции
каждом из этих интервалов.

$f(0)>0,$

$f(3)<0,$

$f(5)>0.$

Выбрав интервал со знаком минус запишем ответ $x\in[1;4].$

3. *Ответ*: $x\in[1;4].$

Пример 2

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geq 0$$

Решим данное неравенство методом интервалов.

Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$,

приравняем функцию к нулю $f(x) = 0$,

$$\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} = 0$$

$x^2 - 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $x^2 - 5x + 6 \neq 0$

$(x-1)(x+1) = 0$ $\qquad\qquad$ $x \neq 2$ *и* $x \neq 3$

$(x-1) = 0$ *или* $x + 1 = 0$

$x = 1$ *или* $x = -1$

Область определения функции вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т.е. точек $x = 2$ *и* $x = 3$.

Данные четыре точки разбивают область определения функции на пять интерв
в каждом из
которых функция непрерывна и не обращается в нуль. Определяем знак функции
каждом из этих интервалов.

$f(-2) > 0,$

$f(0) < 0,$

4. $f(1{,}5) > 0,$

$f(2{,}5) < 0,$

$f(4) > 0$

Выбрав интервалы со знаком плюс запишем ответ $x \in (-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (3; \infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -1] \cup [1; 2) \cup (3; \infty)$.

5. Решите неравенства методом интервалов:

1) $x^2 - 22x - 23 \leq 0$;
2) $x^2 - 3x - 10 > 0$;
3) $(6x-3)(x+4) < 0$;
4) $x^2 - 8x + 15 < 0$;
5) $3x^2 - 8x + 5 \geq 0$
6) $(x-2)(4x-8) > 0$;
7) $\dfrac{x}{x-1} \prec 0$;
8) $\dfrac{3-x}{x+4} \prec 1$;
9) $\dfrac{1}{x} \succ x$;
10) $\dfrac{1}{x^2} \succ x$.

Практическая работа № 27

Тема: Решение рациональных алгебраических неравенств.

Цель:
- закрепить навыки решения рациональных алгебраических неравенств.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник «Алгебра и начала анализа» 10-11кл под ред. А.Н.Колмагорова

Ход работы:

Справочный материал

Методы решения неравенств зависят в основном от того, к какому классу относятся

функции, составляющие неравенство.

I. Квадратные неравенства, то есть неравенства вида

$ax^2 + bx + c > 0$ (< 0), $a \neq 0$.

Будем считать, что a>0. Если это не так, то умножив обе части неравенства на -1 и изменив знак неравенства на противоположный, получим желаемое.

Чтобы решить неравенство можно:

1. Квадратный трехчлен разложить на множители, то есть неравенство записать в виде

$a (x - x_1) (x - x_2) > 0$ (< 0).

2. Корни многочлена нанести на числовую ось. Корни разбивают множество действительных чисел на промежутки, в каждом из которых соответствующая квадратичная функция будет знакопостоянной.

3. Определить знак $a (x - x_1) (x - x_2)$ в каждом промежутке и записать ответ.

Если квадратный трехчлен не имеет корней, то при D<0 и a>0 квадратный трехчлен при любом x положителен.

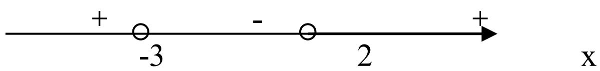
Примеры:

1) Решить неравенство. $x^2 + x - 6 > 0$.

Решение.

Разложим квадратный трехчлен на множители $(x + 3) (x - 2) > 0$

Наносим корни трехчлена на числовую ось и определяем знаки на каждом промежутке



Ответ: $x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$.

2) $(x - 6)^2 > 0$

Решение:

Это неравенство верно при любом x, кроме x = 6.

Ответ: $(-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$.

3) $x^2 + 4x + 15 < 0$.

Решение:

Здесь $D < 0$, $a = 1 > 0$. Квадратный трехчлен положителен при всех x.

Ответ: $x \in \varnothing$.

Решить неравенства:

1. $1 + x - 2x^2 < 0$. Ответ: $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$.
2. $3x^2 - 12x + 12 \le 0$. Ответ: $x = 2$.
3. $3x^2 - 7x + 5 \le 0$. Ответ: $x \in \emptyset$.
4. $2x^2 - 12x + 18 > 0$. Ответ: $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.
5. При каких значениях а неравенство
   $x^2 - ax > \frac{2}{a}$ выполняется для любых х? Ответ: $a \in (-2; 0)$.

II. Рациональные неравенства высших степеней, то есть неравенства вида $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 > 0$ (<0), n>2.

Многочлен высшей степени следует разложить на множители, то есть неравенство записать в виде

$a_n (x - x_1)(x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) > 0$ (<0).

Отметить на числовой оси точки, в которых многочлен обращается в нуль.

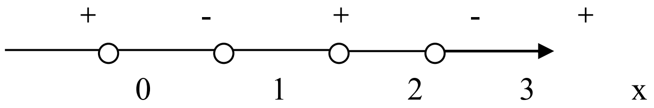
Определить знаки многочлена на каждом промежутке.

Примеры:

1) Решить неравенство $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x < 0$.

Решение:

$x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x = x(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = x(x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6) = x(x - 1)(x^2 - 5x + 6) =$
$x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Итак, $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) < 0$

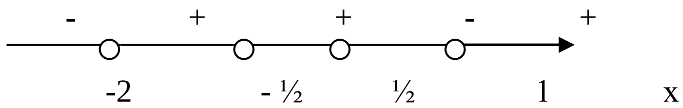


Ответ: $(0; 1) \cup (2; 3)$.

2) Решить неравенство $(x - 1)^5 (x + 2)(x - ½)^7 (2x + 1)^4 < 0$.

Решение:

Отметим на числовой оси точки, в которых многочлен обращается в нуль. Это x = 1, x = -2, x = ½, x = - ½.



В точке x = - ½ смены знака не происходит, потому что двучлен (2x + 1) возводится в четную степень, то есть выражение $(2x + 1)^4$ не меняет знак при переходе через точку x = - ½.

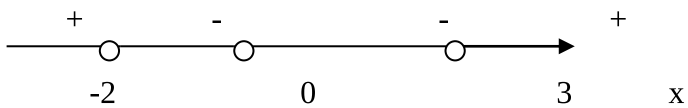
Ответ: $(-\infty; -2) \cup (½; 1)$.

3) Решить неравенство: $x^2 (x + 2)(x - 3) \ge 0$.

Решение:

Данное неравенство равносильно следующей совокупности

$$\left[\begin{array}{l} x^2(x+2)(x-3) > 0 (1) \\ x^2(x+2)(x-3) = 0 (2) \end{array}\right.$$



Решением (1) является $x \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$. Решением (2) являются x = 0, x = -2, x = 3. Объединяя полученные решения, получаем $x \in (-\infty; -2] \cup \{ \} \cup [3; +\infty)$.

Ответ: x $\in$ (-∞; -2] $\cup$ {
} $\cup$ [3; +∞).

Решить неравенства:

1. (5x - 1) (2 - 3x) (x + 3) > 0. Ответ: $(-\infty;-3)\cup(\frac{1}{5};\frac{2}{3})$.
2. $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 \le 0$. Ответ: $(-\infty;1]$.
3. $(x - 3)(x - 1)^2(3x - 6 - x^2) < 0$. Ответ: $(3;+\infty)$.
4. $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \ge 0$. Ответ: $(-\infty;+\infty)$.

III. Дробно-рациональные неравенства.

При решении таких неравенств можно придерживаться следующей схемы.

1. Перенести все члены неравенства в левую часть.

2. Все члены неравенства в левой части привести к общему знаменателю, то есть неравенство записать в виде

$\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ (<0).

3. Найти значения x, при которых функция y=$\frac{f(x)}{g(x)}$ может менять свой знак. Это корни уравнений $f(x) = 0,\ \ g(x) = 0$.

4. Нанести найденные точки на числовую ось. Эти точки разбивают множество действительных чисел на промежутки, в каждом их которых функция будет знакопостоянной.

5. Определить знак $\frac{f(x)}{g(x)}$ в каждом промежутке, вычисляя, например, значение данного отношения в произвольной точке каждого промежутка.

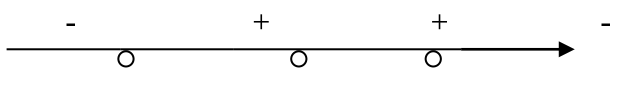
6. Записать ответ, обращая особое внимание на граничные точки промежутков. При решении строгого неравенства $\frac{f(x)}{g(x)}$>0 (<0) граничные точки в ответ не включаются. При решении нестрогого неравенства $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$ (≤ 0), если точка является корнем знаменателя, то она не включается в ответ (даже если она одновременно является корнем числителя). Если же точка является корнем одного числителя, то она включается в ответ.

Примеры.

1). Решить неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.

Решение: $\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0$, $\frac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0$, $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0$

Найдем нули числителя и знаменателя. Это x = 3, x = 5, x=1. Наносим найденные точки на числовую ось и определяем знаки $\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)}$ в каждом промежутке



1 3 5 x

Выбираем любой $x \in (5; +\infty)$, например x = 10. Тогда $\frac{(10-3)^2}{(10-5)(1-10)} < 0$.

Выбираем x = 4 $\in (3; 5)$.

Получаем $\frac{(4-3)^2}{(4-5)(1-4)} > 0$. При x = 2 $\in (1; 3)$. Получаем $\frac{(2-3)^2}{(2-5)(1-2)} > 0$.

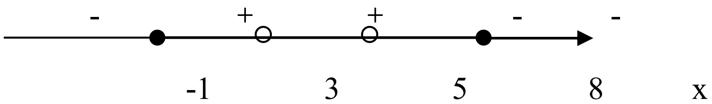
Наконец, при x = 0 $\in (-\infty; 1)$. Вычисляем $\frac{(0-3)^2}{(0-5)(1-0)} < 0$.

Ответ: x $\in (1; 3) \cup (3; 5)$.

2). Найти сумму целых решений неравенства $\frac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x-3)^2(5-x)} \geq 0$.

Решение. Найдем нули числителя и знаменателя дроби. Это x = -1, x=8, x = 3, x= 5.

Нанесем найденные точки на числовую ось и определим знак дроби в каждом промежутке, вычисляя значение этой дроби в произвольной точке каждого промежутка.



Решением исходного неравенства является
x $\in [-1, 3) \cup (3; 5) \cup \{8\}$. Найдем сумму целых решений: -1 +1+0+ 2 + 4 + 8 = =14.
Ответ: 14.

Задание:

Решить неравенства:

$\frac{(3-x)(2x+1)}{(x-2)(x+1)} \leq 0$.

Ответ: $(-\infty;-1) \cup [-\frac{1}{2};2) \cup [3;+\infty)$.

$\frac{x+1}{x-2} > \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2}$.

Ответ: $(-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

$x + \frac{6}{x} < 7$.

Ответ: $(-\infty;0) \cup (1;6)$.

$\frac{(8-x^3)(x^3-27)}{(8+x^3)(x^3+27)} > 0$.

Ответ: $(-3;-2) \cup (2;3)$.

$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2-x+1} \leq \frac{1-2x}{x^3+1}$.

Ответ: $(-\infty;-1) \cup (-1;2]$.

Практическая работа № 28

Тема: Решение рациональных систем уравнений.

Цель:
- закрепить навыки решения рациональных систем уравнений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник «Алгебра и начала анализа» 10-11кл под ред. А.Н.Колмагорова

Ход работы:

1. Запишите ответы на контрольные вопросы.

1) Что называется системой уравнений?
2) Какие вы знаете способы решения систем уравнений?
3) Рассмотрите примеры решения систем уравнений основными способами.

2. Решите системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 5x+4y=1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x-9y=12, \\ 4x-12y=16 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x-8y=0, \\ x-1{,}6y=1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x+10y=x+8, \\ 4x-12y=50-y \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0{,}5x+5{,}5=\dfrac{1}{3}y+6\dfrac{1}{3}, \\ 5x-3y=8 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x--5y=-7, \\ -y+0{,}6x=-1{,}4 \end{cases}$

7) $\begin{cases} x+y=5, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

2.Покажите графически и методом подстановки, что системы имеют единственное решение:

1) $\begin{cases} 7x+4y=13, \\ 3x-y=11 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x-3y=26, \\ 2x+y=17 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 3{,}5x-2{,}5y=25, \\ x+2y=18 \end{cases}$

Справочный материал

Система линейных уравнений с двумя переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_1x+в_1y=c_1 \\ a_2x+в_2y=c_2 \end{cases}$$

где a_1, a_2, $в_1$, $в_2$, c_1, c_2, - заданные числа, а x и y - неизвестные

Система уравнений — это условие, состоящее в одновременном выполнении нескольких уравнений относительно нескольких переменных. Решением системы уравнений называется упорядоченный набор чисел (значений переменных), при подстановке которых вместо переменных каждое из уравнений обращается в верное равенство.

Способы решения систем уравнений

1) Графический способ.
2) Способ подстановки.
3) Способ алгебраического сложения.
4) Способ введения новой переменной.
5) Способ разложения на множители.

Методические рекомендации по решению систем уравнений

Графический способ

Строятся графики обоих уравнений, находятся точки пересечения графиков.

Способ подстановки

1) Выражают из одного уравнения одну переменную через другую.
2) Подставляют полученное выражение в другое уравнение.
3) Решают полученное уравнение с одной переменной.
4) Находят значение второй переменной.
5) Записывают ответ.

Способ сложения

1) Умножают обе части одного или обоих уравнений на какое-либо число так, что при последующем сложении какие-то слагаемые взаимно уничтожить.
2) Складывают почленно полученные уравнения.
3) Решают полученное уравнение с одной переменной.
4) Находят значения другой переменной.

Введение новой переменной

Вводится новая переменная t, получается дробно-рациональное уравнение относительно t. Решая полученное уравнение, находят значения t, и выражают либо x, либо y через вторую переменную. Подставляя полученное выражение во второе уравнение, решают уравнение с одной переменной.

Разложение на множители

Применяя способ группировки, раскладывают выражение на множители. Произведение двух множителей равно 0, когда хотя бы один из множителей равен 0. Выражают одну переменную через другую, подставляют полученные выражения во второе уравнение и получают уравнение с одной переменной

Пример1. Решить систему уравнений способом подстановки.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4\,, \\ x + 3y = 5\,. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим x через коэффициенты и y : $x = (2y + 4) / 3$.

Подставляем это выражение во второе уравнение и находим y :
$(2y + 4) / 3 + 3y = 5$, откуда $y = 1$.
Теперь находим x, подставляя найденное значение вместо y в выражение для x: $x = (2 \cdot 1 + 4) / 3$, откуда $x = 2$.
Ответ: (2;1)

П р и м е р 2. Решить систему уравнений способом алгебраического сложения.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 4, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Умножаем первое уравнение на –1, второе – на 3 и складываем их:

$$\begin{cases} -3x + 2y = -4, \\ 3x + 9y = 15. \end{cases}$$

$$11y = 11,$$ отсюда $y = 1$.

Подставляем это значение во второе уравнение (или в первое) $3x + 9 = 15$, отсюда $x = 2$.

Ответ: (2;1)

Практическая работа №29

Тема: **Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них.**

Цели:
- изучить материал по теме: «Аксиомы стереометрии и простейшие следствия из них», научиться применять аксиомы при решении задач
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Задание: Изучите теоретический материал, выполните конспект изучаемого материала, выполните необходимые чертежи.

Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

В стереометрии так же как и в планиметрии свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

С введением плоскости появляется необходимость расширить системы аксиом.

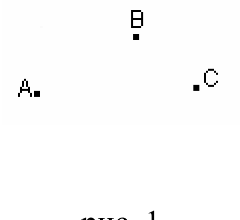


рис. 1

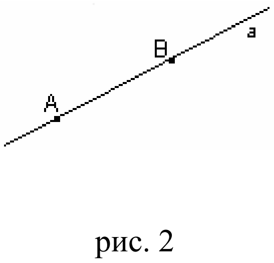


рис. 2

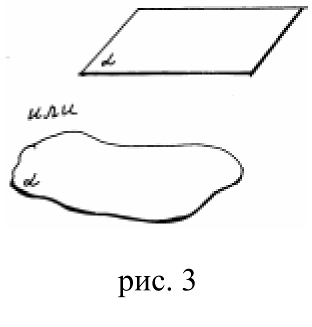
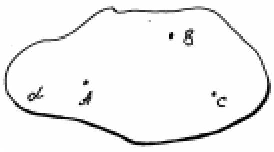


рис. 3

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах.

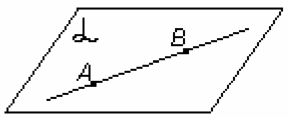
А1. Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.



$A \in \alpha$
$B \in \alpha$ (точки А, В, С лежат в плоскости α)
$C \in \alpha$

рис. 4

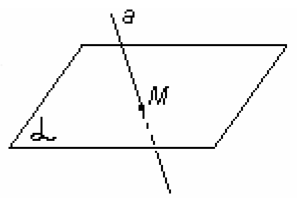
А2. Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости



$AB \subset \alpha$
Прямая АВ лежит в плоскости α

рис. 5

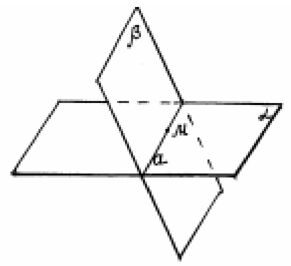
Замечание. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются.



$a \cap \alpha = M$
Прямая а и плоскость α пересекаются в точке М.

рис. 6

А3. Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.



$\alpha \cap \beta = a$
α и β пересекаются по прямой а.

рис. 7

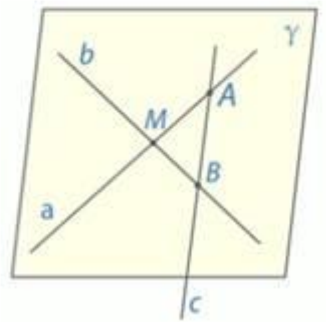
Следствие 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Следствие 2. Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Задание:
1. Точки А, В, С, Dне лежат в одной плоскости. Будут ли плоскости, проходящие через точки А, В, Си через точки В, D, А пересекаться по прямой АВ?
2. Рассмотрите решение следующих задач.

Задача 1.

Даны две прямые, которые пересекаются в точке *M*. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку *M* и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости



Решение:

Нам даны две прямые *a* и *b*, которые пересекаются в некоторой точке *M*. Возьмем произвольную прямую *c*, которая не проходит через точку *M*, но пересекает исходные прямые *a* и *b* в точках *A, B*, соответственно.

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна, согласно 2 теореме. Значит через пересекающиеся прямые *a* и *b* проходит единственная плоскость, обозначим ее γ.

Две разные точки *A* и *B* прямой *c* принадлежат плоскости γ. А из того, что две точки прямой принадлежат плоскости, вытекает, что все точки прямой принадлежат плоскости, т.е. вся прямая лежит в плоскости. Значит, прямая *c* принадлежит этой плоскости.

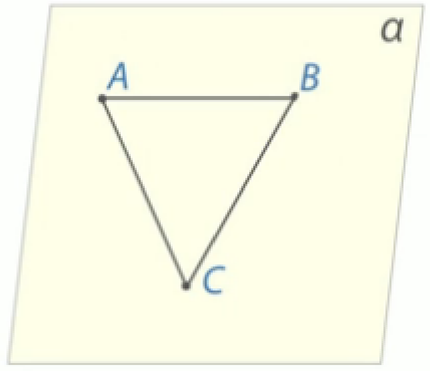
Таким образом, мы доказали, что все прямые, пересекающие *A* и *B*, но не проходящие через *M*, лежат в одной плоскости.

Задача 2

Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

Решение:

Пусть нам даны три точки: *A, B,* и *C*. Нужно доказать, что отрезки *AB, BC, CA* лежат в одной плоскости .



Если точка C лежит на прямой AB, то ответ очевиден. Предположим, что точка C не принадлежит прямой AB. Тогда через три точки $A, B, C,$ не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна, в силу аксиомы 1. Обозначим эту плоскость α.

Прямая AB целиком лежит в плоскости α, потому что две ее точки лежат в этой плоскости. Но, значит, и отрезок AB лежит в плоскости α.

Аналогично и с другими отрезками. Прямая BC лежит в плоскости α, потому что две ее точки B и C лежат в плоскости α, значит, и отрезок BC лежит в плоскости α.

И аналогично, отрезок AC лежит в плоскости α. Что и требовалось доказать.

Практическая работа №30

Тема: **Перпендикуляр и наклонная к плоскости.**

Цели:
- изучить теоретический материал по теме, научиться выполнять чертежи.
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:

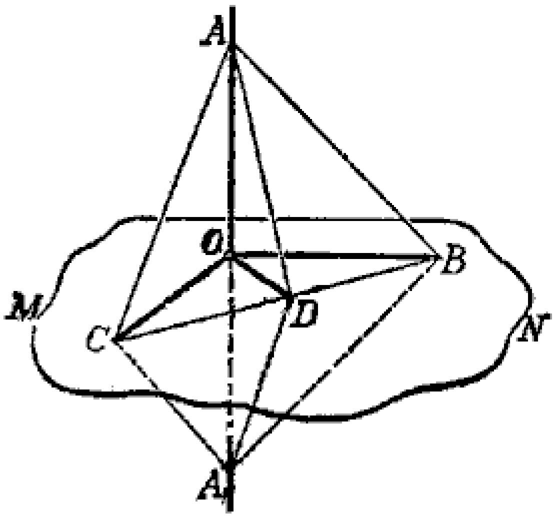
Задание: Изучите теоретический материал, ответьте на контрольные вопросы, выполните необходимые чертежи.

1. Когда прямая называется перпендикулярной к плоскости?
2. Запишите определение наклонной, проекции наклонной на плоскость, основания наклонной, основания перпендикуляра, выполните чертежи.
3. Запишите теоремы о сравнительной длине перпендикуляра и наклонных.

Теоретический материал

Поставим задачу определить, в каком случае прямая может считаться перпендикулярной к плоскости. Докажем предварительно следующее предложение.

Теорема. ***Если прямая*** (AA_1, черт. 15), ***пересекающаяся с плоскостью*** (MN), ***перпендикулярна к каким-нибудь двум прямым*** (OB и OC), ***проведенным на этой плоскости через точку пересечения*** (O) ***данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна и ко всякой третьей прямой*** (OD), ***проведённой на плоскости через ту же точку пересечения*** (O).



Черт. 15.

Отложим на прямой AA_1 произвольной длины, но равные отрезки OA и OA_1 и проведём на плоскости какую-нибудь прямую, которая пересекала бы три прямые, исходящие из точки O, в каких-нибудь точках C, D и B. Эти точки соединим с точками A и A_1. Мы получим тогда несколько треугольников. Рассмотрим их в такой последовательности.

Сначала возьмём треугольники ACB и A_1CB; они равны, так как у них CB—общая сторона, $AC=A_1C$, как наклонные к прямой AA_1, одинаково удалённые от основания O перпендикуляра OC; по той же причине $AB = A_1B$. Из равенства этих треугольников следует, что $\angle ABC = \angle A_1BC$.

После этого перейдём к треугольникам AOB и A_1OB; они равны, так как у них OB—общая сторона, $AB = A_1B$ и $\angle ABD = \angle A_1BD$. Из равенства этих треугольников выводим, что $AO = A_1O$.

Теперь возьмём треугольники AOD и A_1OD; они равны, так как имеют соответственно равные стороны. Из их равенства выводим, что $\angle AOD$ и $\angle A_1OD$, а так как эти углы смежные, то, следовательно, $AA_1 \perp OD$.

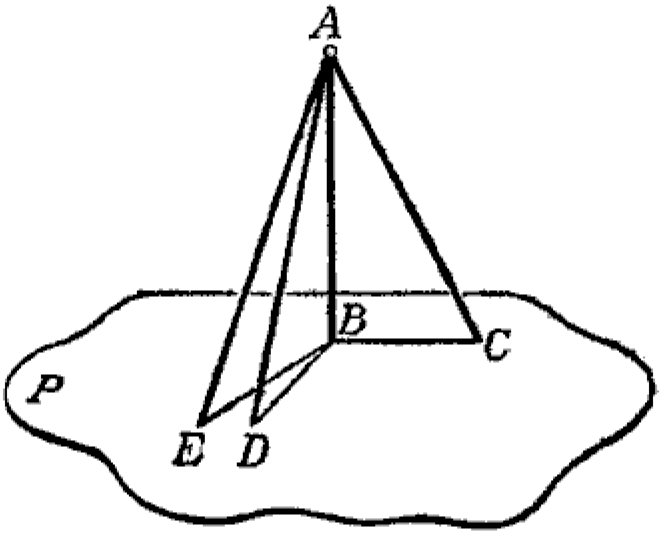
Определение. Прямая называется **перпендикулярной** к плоскости, если она, пересекаясь с этой плоскостью, образует прямой угол с каждой прямой, проведённой на плоскости через точку пересечения. В этом случае говорят также, что плоскость перпендикулярна к прямой.

Из предыдущей теоремы следует, что прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к двум прямым, лежащим в данной плоскости и проходящим через точку пересечении данной прямой и плоскости.

Прямая, пересекающая плоскость, но не перпендикулярная к ней, называется **наклонной** к этой плоскости. Точка пересечения прямой с плоскостью называется **основанием** перпендикуляра или наклонной.

Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных[1]. Когда из одной точки А (черт. 16) проведены к плоскости перпендикуляр АВ и наклонная АС, условимся называть, **проекцией** наклонной на плоскость Р отрезок ВС, соединяющий основание перпендикуляра и основание наклонной.

[1] Для краткости термины "перпендикуляр" и "наклонная" употребляются вместо ,"отрезок перпендикуляра, ограниченный данной точкой и основанием перпендикуляра" , и "отрезок наклонной, ограниченный данной точкой и основанием наклонной.



Черт. 16.

Таким образом, отрезок ВС есть проекция наклонной АС, отреюк BD есть проекция наклонной AD и т. д.

Теорема. *Если из одной и той же точки* (А, черт. 16), *взятой вне плоскости* (Р), *проведены и этой плоскости перпендикуляр* (АВ) *и какие-нибудь наклонные* (АС, AD, АЕ, ...), *то*:

1) *две наклонные, имеющие равные проекции, равны*;

2) *из двух наклонных та больше, проекция которой больше,*

Вращая прямоугольные треугольники АВСи ABD вокруг катета АВ, мы можем совместить их плоскости с плоскостью $\triangle$ АВЕ. Тогда все наклонные будут лежать в одной плоскости с перпендикуляром, а все проекции расположатся на одной прямой. Таким образом, доказываемые теоремы приводятся к аналогичным теоремам планиметрии.

Замечание. Так как АВ есть катет прямоугольного треугольника, а каждая из наклонных АС, AD, АЕ, ... есть гипотенуза, то перпендикуляр АВ меньше всякой наклонной;

значит, перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, есть наименьший из всех отрезков, соединяющих данную точку с любой точкой плоскости, и потому он принимается за меру расстояния точки А от плоскости Р.

Обратные теоремы. *Если из одной и той же точки, взятой вне плоскости, проведены перпендикуляр и какие-нибудь наклонные, то*:
1) *равные наклонные имеют равные проекции;*
2) *из двух проекций та больше, которая соответствует большей наклонной*.

Задание:

1)Точка А не лежит в плоскости, а точка Е - принадлежит этой плоскости. АЕ = 13 см, проекция этого отрезка на плоскость равна 5см. Каково расстояние от точки А до данной плоскости?

2)Равнобедренный треугольник АВЕ находится в плоскости α. Боковые стороны треугольника АВЕ равны по 10 см, а сторона основания АЕ=16 см. К этой плоскости проведены перпендикуляр СВ, который равен 6 см, и наклонные СА и СЕ. Вычислите расстояние от точки С до стороны треугольника АЕ.

3) Через вершину А прямоугольного треугольника АВС с прямым углом С проведена прямая AD, перпендикулярная к плоскости треугольника, а) Докажите, что треугольник CBD прямоугольный, б) Найдите BD, если ВС = 4, DC =6.

Практическая работа №31

Тема: **Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Решение задач.**

Цели:
- закрепить понятия перпендикуляра и наклонной к плоскости при решении задач.
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:

Решите задачи:

Вариант 1

1) Прямая a пересекает плоскость β в точке C, и образует с плоскостью угол 30°. P∈a, точка R - проекция точки P на плоскость β. PR=7 см. Найди PC.

2)Прямоугольный треугольник MBE (∢M=90°) находится в плоскости α. BE=13 см, а ME=12 см. К этой плоскости проведён перпендикуляр CB длиной 7 см. Вычисли расстояние от точки C до стороны треугольника ME.

3)Отрезок AD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника ABC. Известно, что AB =AC = 5 см, BC= 6 см, AD = 12 см. Найдите расстояния от концов отрезка AD до прямой BC.

Вариант 2

1) К плоскости α проведена наклонная, длина которой равна 10 см, проекция наклонной равна 6 см. На каком расстоянии от плоскости находится точка, из которой проведена наклонная?

2) Точка K расположена в расстоянии 8 cm от плоскости прямоугольника ABCD и в равных расстояниях от вершин прямоугольника.

Рассчитай, на каком расстоянии от вершин прямоугольника расположена точка K, если длина сторон прямоугольника 24 cm и 18 cm.

3) Через вершину А прямоугольника ABCD проведена прямая АК, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что KD = 6 см, КВ = 7 см, КС=9 см. Найдите: а) расстояние от точки К до плоскости прямоугольника ABCD;

Вариант 3

1) К плоскости α проведена наклонная AB (A∈α). Длина наклонной равна 18 см, наклонная с плоскостью образует угол 60°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка B.

2) Расстояние от точки G до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 12 см. Найдите расстояние от точки G до плоскости ABC, если AB = 9 см.

3) Прямая OK перпендикулярна к плоскости ромба ABCD, диагонали которого пересекаются в точке O. Найдите это расстояние, если OK = 4,5 дм, AC = 6 дм, BD = 8 дм.

Вариант 4

1) Прямая m пересекает плоскость ß в точке A, и образует с плоскостью угол 60°,P∈ m, точка R - проекция точки P на плоскость β. PR=9 см. Найди PA.

2)Наклонная AD с плоскостью α образует угол 30˚, а наклонная DC с плоскостью α образует угол 45˚. Длина перпендикуляра DB равна 7 см. Вычисли длины обеих наклонных.

3) Через вершину В квадрата ABCD проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если BM = 10 дм, AB = 5 дм.

Вариант 5

1) Длина отрезка VB равна 10 м. Он пересекает плоскость в точке O. Расстояние от концов отрезка до плоскости соответственно равны 2 м и 3 м. Найди острый угол, который образует отрезок VB с плоскостью.

2) Один из катетов прямоугольного треугольника ABC равен 5, а острый угол, прилежащий к этому катету, равен 60˚. Через вершину прямого угла C проведена прямая CD, перпендикулярная к плоскости этого треугольника, CD = 8. Найдите расстояние от точки D до прямой AB.

3) Из точки A, удаленной от плоскости ß на расстояние 5 см, проведены к этой плоскости наклонные AB и AC под углом 30° к плоскости. Их проекции на плоскость ß образуют угол в 120°. Найдите BC.

Вариант 6

1) Проекции наклонных AD и DC на плоскости α равны соответственно 4 см и 10 см, а угол между ними равен 60°. Вычисли расстояние между концами проекций наклонных.

2) Точка M расположена в расстоянии 10 cm от плоскости
прямоугольника ABCD и в равных расстояниях от вершин прямоугольника.

Рассчитай, на каком расстоянии от вершин прямоугольника расположена точка M, если длина сторон прямоугольника 12 cm и 5 cm.

3) Один конец данного отрезка лежит в плоскости α, а другой находится от нее на расстоянии 11 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости α.

Вариант 7

1) К плоскости α проведена наклонная CD (C∈α). Длина наклонной равна 16 см, наклонная с плоскостью образует угол 30°. Вычисли, на каком расстоянии от плоскости находится точка D.

2) Через вершину B квадрата ABCD проведена прямая BF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если BF = 8 дм, AB = 4 дм.

3) Отрезок KD перпендикулярен к плоскости равнобедренного треугольника KPE. Известно, что KP =KE = 4 см, PE= 8 см, KD = 14 см. Найдите расстояния от концов отрезка KD до прямой PE.

Вариант 8

1) Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна 7см. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 30°?

2) Расстояние от точки N до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 5 см. Найдите расстояние от точки N до плоскости ABC, если AB = 8 см.

3) Через вершину A прямоугольника ABCD проведена прямая AK, перпендикулярная к плоскости прямоугольника. Известно, что KD = 6 см, KB = 7 см, KC=9 см. Найдите расстояние между прямыми AK и CD.

Вариант 9

1) Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна 15. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 60°.

2) Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Известно, что BD = 9 см, AC=10 см, BC = BA = 13 см. Найдите расстояние от точки D до прямой AC

3) Точка M расположена в расстоянии 10 см. от плоскости
прямоугольника ABCD и в равных расстояниях от вершин прямоугольника.

Рассчитай, на каком расстоянии от верши прямоугольника расположена точка M, если длина сторон прямоугольника 16 см и 10 см.

Вариант 10

1) Под углом φ к плоскости α проведена наклонная. Найдите φ, если известно, что проекция наклонной вдвое меньше самой наклонной.

2) Через вершину прямого угла C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC проведена прямая CM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояние от точки M до прямой AB, если AC = 4 см, а CM = 2 $\sqrt{7}$ см.

3) Прямая BD перпендикулярна к плоскости треугольника ABC. Известно, что BD = 9 см, AC=10 см, BC = BA = 13 см. Найдите площадь треугольника ACD.

Вариант11

1) Проекции наклонных AM и MC на плоскость α равны соответственно 5 см и 8 см, а угол между ними равен 45°.

Вычисли расстояние между концами проекций наклонных

2) Прямая OK перпендикулярна к плоскости ромба ABCD, диагонали которого пересекаются в точке O. Докажите, что расстояния от точки K до всех прямых, содержащих стороны ромба, равны

3) Через вершину M квадрата MNOR проведена прямая MF, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки F до прямых, содержащих стороны и диагонали квадрата, если MF = 12 дм, MN = 6 дм.

Вариант 12

1) Один конец данного отрезка лежит в плоскости ß, а другой находится от нее на расстоянии 12 см. Найдите расстояние от середины данного отрезка до плоскости ß.

2) Точка P расположена в расстоянии 12 см от плоскости прямоугольника ABCD и в равных расстояниях от вершин прямоугольника.

Рассчитай, на каком расстоянии от вершин прямоугольника расположена точка P, если длина сторон прямоугольника 8 см и 6 см.

3) Проекции наклонных MN и MK на плоскости α равны соответственно 8 см и 12 см, а угол между ними равен 30°. Вычисли расстояние между концами проекций наклонных.

Вариант 13

1) Наклонная AM, проведенная из точки A к данной плоскости, равна 8см. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 45°.

2) Через вершину B ромба ABCD проведена прямая BM, перпендикулярная к его плоскости. Найдите расстояния от точки M до прямых, содержащих стороны ромба, если AB = 25 см, ∠BAD = 60°, BM =12,5 см.

3) Из точки A, не принадлежащей плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр AO и две наклонные AB и AC. Известно, что ∠OAB= ∠BAC = 60°, AO = 1,5 см. Найдите расстояние между основаниями наклонных.

Вариант 14

1) Концы отрезка отстоят от плоскости α на расстояниях 3 см и 7 см. Найдите расстояние от середины отрезка до плоскости α.

2) Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника ABC равно 4 см. Найдите расстояние от точки M до плоскости ABC, если AB = 6 см.

3) Наклонная HM, проведенная из точки H к данной плоскости, равна 9см. Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой HM и данной плоскостью равен 45°?

Практическая работа №32

Тема: **Решение задач на параллельность прямых и плоскостей.**

Цели:
- закрепить изученный материал при решении задач по разделу «Прямые и плоскости в пространстве»;
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник «Геометрия» 10-11кл.

Ход работы:

1.Решите задачи:

1) Из точки В, отстающей от плоскости на расстоянии 4 см, проведена к этой плоскости наклонная ВС под углом 60^0 к прямой ВА, перпендикулярной к плоскости. Определить длину наклонной ВС.
2) Телефонная проволока длиной 15 м протянута от телефонного столба, где она прикреплена на высоте 8 м от поверхности земли, к дому, где она прикреплена на высоте 20 м. Определить расстояние между домом и столбом.
3) Из некоторой точки С проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный 7 см и наклонная, проекция которой на плоскость равна 3 см. Найти длину наклонной.
4) Плоскости М и Р параллельны. Из точек А и В плоскости М проведены к плоскости Р наклонные АС=37 см и ВД=125 см. Проекция наклонной АС на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной ВД?
5) MA – перпендикуляр к плоскости прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AB. Докажите, что $MC \perp BC$.
6) Катет BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle B = 90^0$) лежит в плоскости α. Из вершины A к плоскости α проведен перпендикуляр AO. Найдите ВС, если $OB = 6$ *см*, $OC = 10$ *см*.

Практическая работа №33

Тема: **Двугранные углы**

Цели:
- изучить теоретический материал по теме, научиться выполнять чертежи.
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:

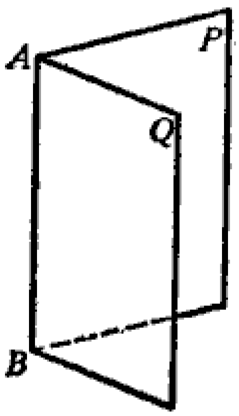
Задание: Изучите теоретический материал, запишите ответы на контрольные вопросы и выполните чертежи.

1. Что называют полуплоскостью?
2. Что такое двугранный угол, его элементы? Выполните чертеж.
3. Как получить линейный угол двугранного угла? Чертеж.
4. Опишите равенство и неравенство двугранных углов.
5. Назовите свойства двугранных углов.

Теоретический материал

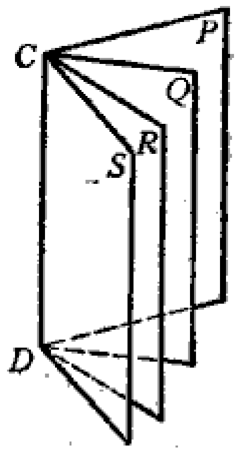
Двугранные углы

Определения. Часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, называется **полуплоскостью**. Фигура, образованная двумя полуплоскостями (P и Q, черт. 26), исходящими из одной прямой (AB), называется **двугранным углом**. Прямая AB называется **ребром**, а полуплоскости P и Q — **сторонами** или **гранями** двугранного угла.



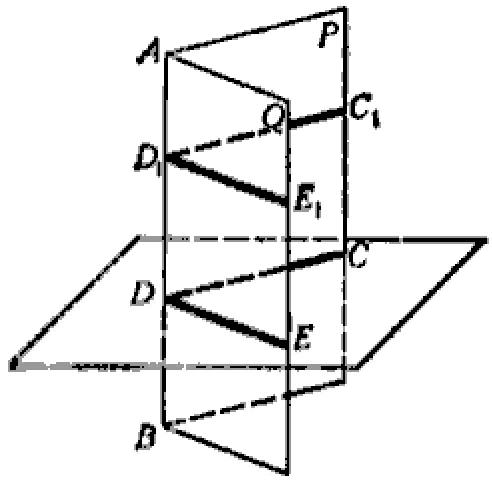
Черт. 26.

Такой угол обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугранный угол AB). Но если при одном ребре лежат нисколько двугранных углов, то каждый из них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, а две крайние — у граней (например, двугранный угол SCDR) (черт. 27).



Черт. 27.

Если из произвольной точки D ребра AB (черт. 28) проведём на каждой грани по перпендикуляру к ребру, то образованный ими угол CDE называется **линейным углом** двугранного угла.



Черт. 28.

Величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре. Так, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$ равны, потому что их стороны соответственно параллельны и одинаково направлены.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру, так как она содержит две прямые, перпендикулярные к нему. Поэтому для получения линейного угла достаточно грани данного двугранного угла пересечь плоскостью, перпендикулярной к ребру, и рассмотреть получившийся в этой плоскости угол.

Равенство и неравенство двугранных углов. Два двугранных угла считаются равными, если они при вложении могут совместиться; в противном случае тот из двугранных углов считается меньшим, который составит часть другого угла.

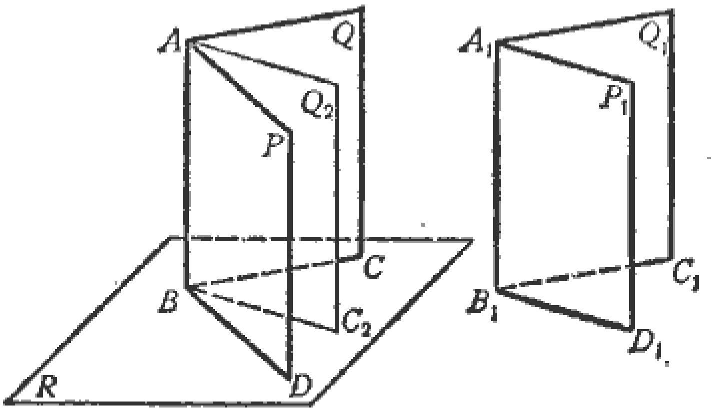
Подобно углам в планиметрии, двугранные углы могут быть **смежные, вертикальные** и пр.

Если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них называется **прямым двугранным углом**.

Теоремы. 1) ***Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.***

2) ***Большему двугранному углу соответствует больший линейный угол.***

Пусть PABQ, и $P_1A_1B_1Q_1$ (черт. 29)—два двугранных угла. Вложим угол A_1B_1 в угол AB так, чтобы ребро A_1B_1 совпало с ребром AB и грань P_1 с гранью P.



Черт. 29.

Тогда если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадёт с гранью Q; если же угол A_1B_1 меньше угла AB, то грань Q_1 займёт некоторое положение внутри двугранного угла, например Q_2.

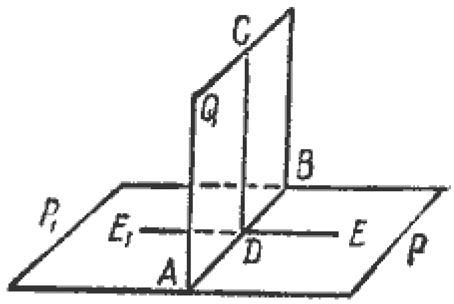
Заметив это, возьмём на общем ребре какую-нибудь точку B и проведём через неё плоскость R, перпендикулярную к ребру. От пересечения этой плоскости с гранями двугранных углов получатся линейные углы. Ясно, что если двугранные углы совпадут, то у них окажется один и тот же линейный угол CBD; если же двугранные углы не совпадут, если, например, грань Q_1 займёт положение Q_2, то у большего двугранного угла окажется больший линейный угол (именно: $\angle CBD > \angle C_2BD$).

Обратные теоремы. 1) ***Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.***

2) ***Большему линейному углу соответствует больший двугранный угол***.

Эти теоремы легко доказываются от противного.

Следствия. 1) *Прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол, и обратно.*



Черт. 30.

Пусть (черт. 30) двугранный угол PABQ прямой. Это значит, что он равен смежному углу $QABP_1$. Но в таком случае линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а так как они смежные, то каждый из них должен быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1 , то равны и смежные двугранные углы, т. е. каждый из ни должен быть прямой.

2) *Все прямые двугранные углы равны,* лотому что у них равны линейные углы.

Подобным же образом легко доказать, что:

3) *Вертикальные двугранные углы равны*.

4) *Двугранные углы с соответственно параллельными и одинаково (или противоположно) направленными гранями равны.*

5) Если за единицу двугранных углов возьмём такой двугранный угол, который соответствует единице линейных углов, то можно сказать, что двугранный угол измеряется его линейным углом.

Практическая работа № 34
Тема: Решение задач на нахождение двугранных углов.

Цели:

- закрепить изученный материал при решении задач по теме «Двугранные углы. Перпендикулярные плоскости»;
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник, тетрадь

Ход работы:

1.Решите задачи:

1) На одной грани двугранного угла даны две точки A и B; из них опущены перпендикуляры на другую грань: AC=1дм и BD=2дм, и на ребро: AE=3дм и BF. Найти BF.

2) На одной грани двугранного угла взяты две точки, отстоящие от ребра на 51см и 34см. Расстояние первой точки от другой грани равно 15см. Определить расстояние второй точки.
3) Двугранный угол равен 45˚. На одной грани дана точка на расстоянии а от другой грани. Найти расстояние этой точки от ребра.
4) Определить величину двугранного угла, если точка, взятая на одной из граней, отстоит от ребра вдвое далее, чем от другой грани.
5) Дан треугольник АВС со сторонами: АВ=9, ВС=6, АС=5. Через сторону АС проходит плоскость М, составляющая с плоскостью треугольника угол в 45˚. Найти расстояние между плоскостью М и вершиной В.

Справочный материал

Определение. Часть плоскости, лежащая по одну сторону от какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости, называется *полуплоскостью.*

Фигура, образованная двумя полуплоскостями, исходящими из одной прямой (АВ), называется *двугранным углом*. Прямая АВ называется ребром, а полуплоскости Р и Q-*сторонами* или *гранями* двугранного угла.

Такой угол обозначается обыкновенно двумя буквами, поставленными у его ребра (двугранный угол АВ). Но если при одном ребре лежат несколько двугранных углов, то каждый из них обозначают четырьмя буквами, из которых две средние стоят при ребре, а две крайние- у граней (например, двугранный угол SCDR).

Если из произвольной точки D ребра АВ проведем на каждой грани по перпендикуляру к ребру, то образованный ими угол CDE называется *линейным углом двугранного угла.*

Величина линейного угла не зависит от положения его вершины на ребре. Так, линейные углы CDE и $C_1D_1E_1$ равны, потому что их стороны соответственно параллельны и одинаково направлены.

Плоскость линейного угла перпендикулярна к ребру, так как она содержит две прямые, перпендикулярные к нему. Поэтому для получения линейного угла достаточно грани данного двугранного угла пересечь плоскостью, перпендикулярной к ребру, и рассмотреть получившийся в этой плоскости угол.

Равенство и неравенство двугранных углов.

Два двугранных угла считаются *равными,* если они при вложении могут совместиться; в противном случае тот из двугранных углов считается меньшим, который составит часть другого угла.

Подобно углам в планиметрии, двугранные углы могут быть *смежные, вертикальные* и пр.

Если два смежных двугранных угла равны между собой, то каждый из них называется *прямым двугранным углом*.

Теоремы. 1) **Равным двугранным углам соответствуют равные линейные углы.**

2) **Большому двугранному углу соответствует больший линейный угол.**

Пусть PABQ и $P_1A_1B_1Q_1$ (рис.29) - два двугранных угла. Вложим угол A_1B_1 в угол АВ так, чтобы ребро A_1B_1 совпало с ребром АВ и грань P_1 с гранью Р. Тогда если эти двугранные углы равны, то грань Q_1 совпадает с гранью Q; если же угол A_1B_1 меньше угла АВ, то грань Q_1 займет некоторое положение внутри двугранного угла, например Q_2.

Заметив это, возьмем на общем ребре какую-нибудь точку В и проведем через нее плоскость R, перпендикулярную к ребру. От пересечения этой плоскости с гранями двугранных углов получатся линейные углы. Ясно, что если двугранные углы совпадут, то у них окажется один и тот же линейный угол CBD; если же двугранные углы не совпадут, если, например, грань Q_1 займет положение Q_2, то у большего двугранного угла окажется больший линейный угол (именно: $\angle CBD > \angle C_2BD$).

Обратные теоремы. 1) **Равным линейным углам соответствуют равные двугранные углы.** 2) **Большему линейному углу соответствует больший двугранный угол.**
Эти теоремы доказываются от противного.
Следствия. 1) Прямому *двугранному углу соответствует прямой линейный угол, и обратно.*
Пусть двугранным угол PABQ прямой (рис.30). Это значит, что он равен смежному углу $QABP_1$. Но в таком случае линейные углы CDE и CDE_1 также равны; а так как они смежные, то каждый из них должен быть прямой. Обратно, если равны смежные линейные углы CDE и CDE_1, то равны и смежные двугранные углы, т.е. каждый из них должен быть прямой.
2) Все прямые двугранные углы равны, потому что у них равны линейные углы.
Подобным же образом доказать, что:
3) Вертикальные двугранные углы равны.
4) Двугранные углы с соответственно параллельными и одинаково (или противоположно) направленными гранями равны.
5) Если за единицу двугранных углов возьмем такой двугранный угол, который соответствует единице линейных углов, то можно сказать, что двугранный угол измеряется его линейным углом.

Практическая работа №35

Тема: **Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур.**

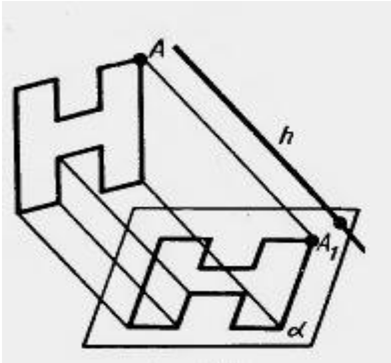
Цели:
- изучить теоретический материал по теме, научиться выполнять чертежи.
- способствовать развитию логического мышления обучающихся.

Норма времени: 2 часа

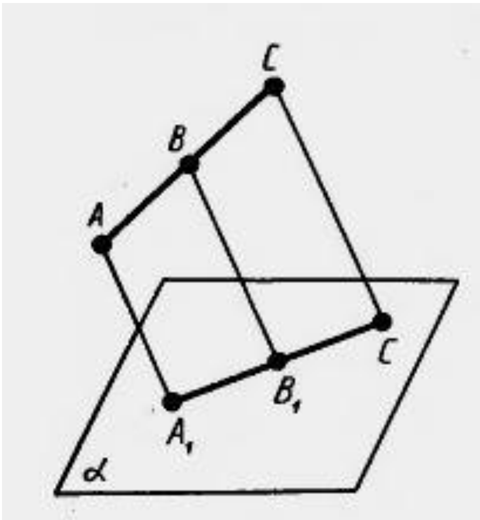
Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:
Теоретический материал
Изображение пространственных фигур на плоскости

Для изображения пространственных фигур на плоскости обычно пользуются параллельным проектированием. Этот способ изображения фигуры состоит в следующем. Берем произвольную прямую h, пересекающую плоскость чертежа α, проводим через произвольную точку A фигуры прямую, параллельную h. Точка A_1 пересечения этой прямой с плоскостью чертежа будет изображением точки A . Построив таким образом изображение каждой точки фигуры, получим изображение самой фигуры. Такой способ изображения пространственной фигуры на плоскости соответствует зрительному восприятию фигуры при рассматривании ее издали.



Прямолинейные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа отрезками



Действительно, все **прямые**, проектирующие точки отрезка AC, лежат В одной плоскости, пересекающей плоскость чертежа а по прямой A_1C_1. Произвольная точка B отрезка AC изображается точкой B_1 отрезка A_1C_1.

Замечание. В только что доказанном свойстве и далее предполагается, конечно, что проектируемые отрезки не параллельны направлению проектирования. Параллельные отрезки фигуры изображаются на плоскости чертежа **параллельные** отрезками (рис. 338).

Действительно, пусть AC и A'C' — параллельные отрезки фигуры. Прямые A_1C_1 и $A'_1C'_1$ параллельны, так как они получаются при пересечении параллельных плоскостей с плоскостью α. Первая из этих плоскостей проходит через прямые AC и AA_1, а вторая — через прямые A'C' и $A'A'_1$.

Отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется при параллельном проектировании. Покажем, например, что (рис. 339)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}. \qquad (*)$$

Проведем через точку B прямую A_2C_2, параллельную A_1C_1 Треугольники BAA_2 и BCC_2 подобны. Из подобия треугольников и равенств $A_1B_1=A_2B$ и $B_1C_1=BC_2$ следует пропорция (*).

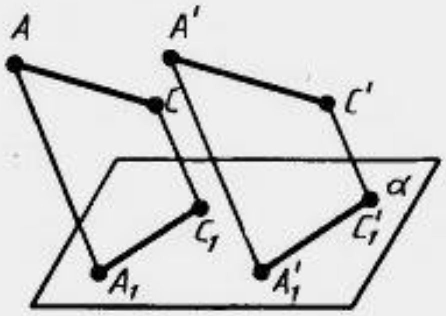


Рис. 338

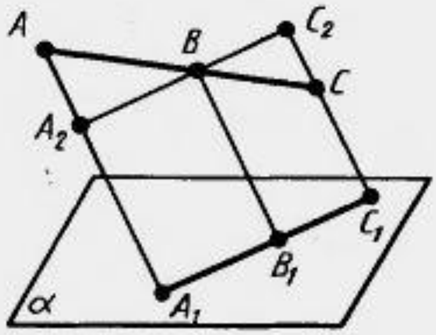


Рис. 339

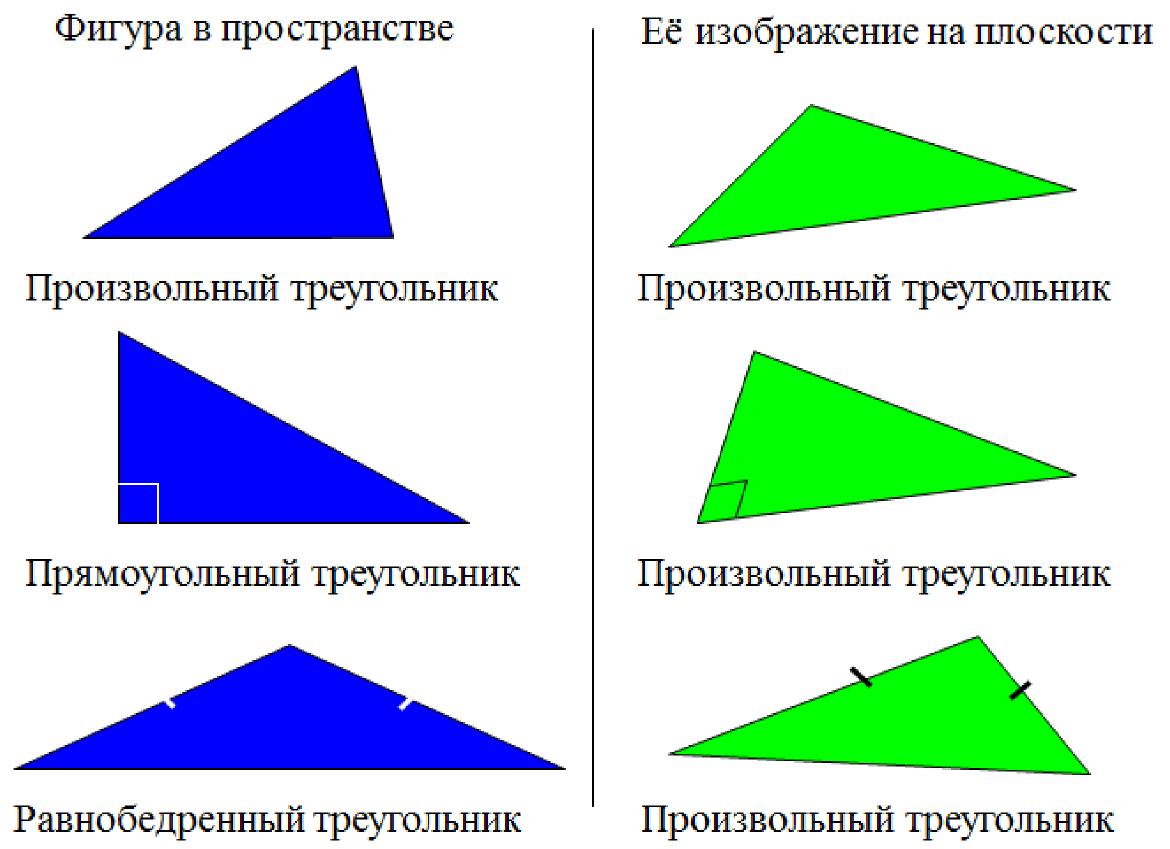
Задача Дана параллельная проекция треугольника. Как построить проекции медиан этого треугольника?

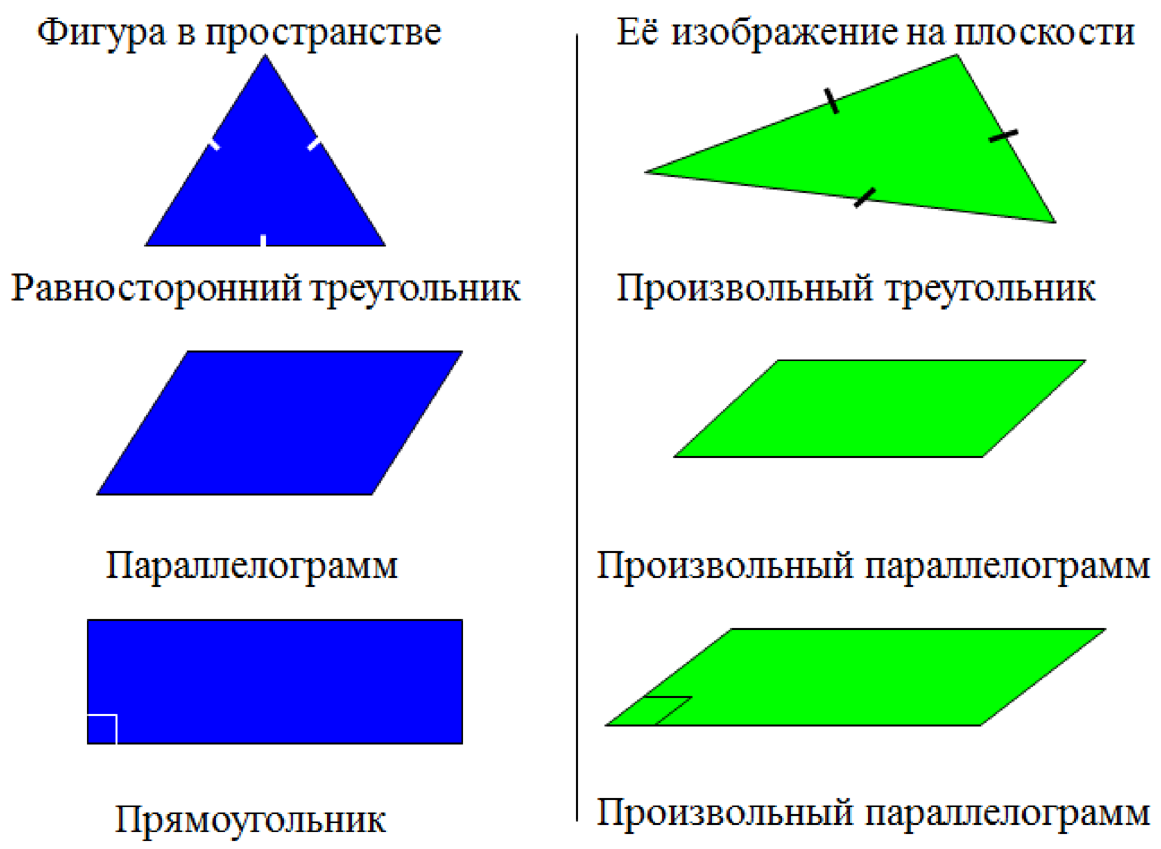
Решение. При параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой. Поэтому середина стороны треугольника проектируется в середину проекции этой стороны. Следовательно, проекции медиан треугольника будут медианами его проекции.

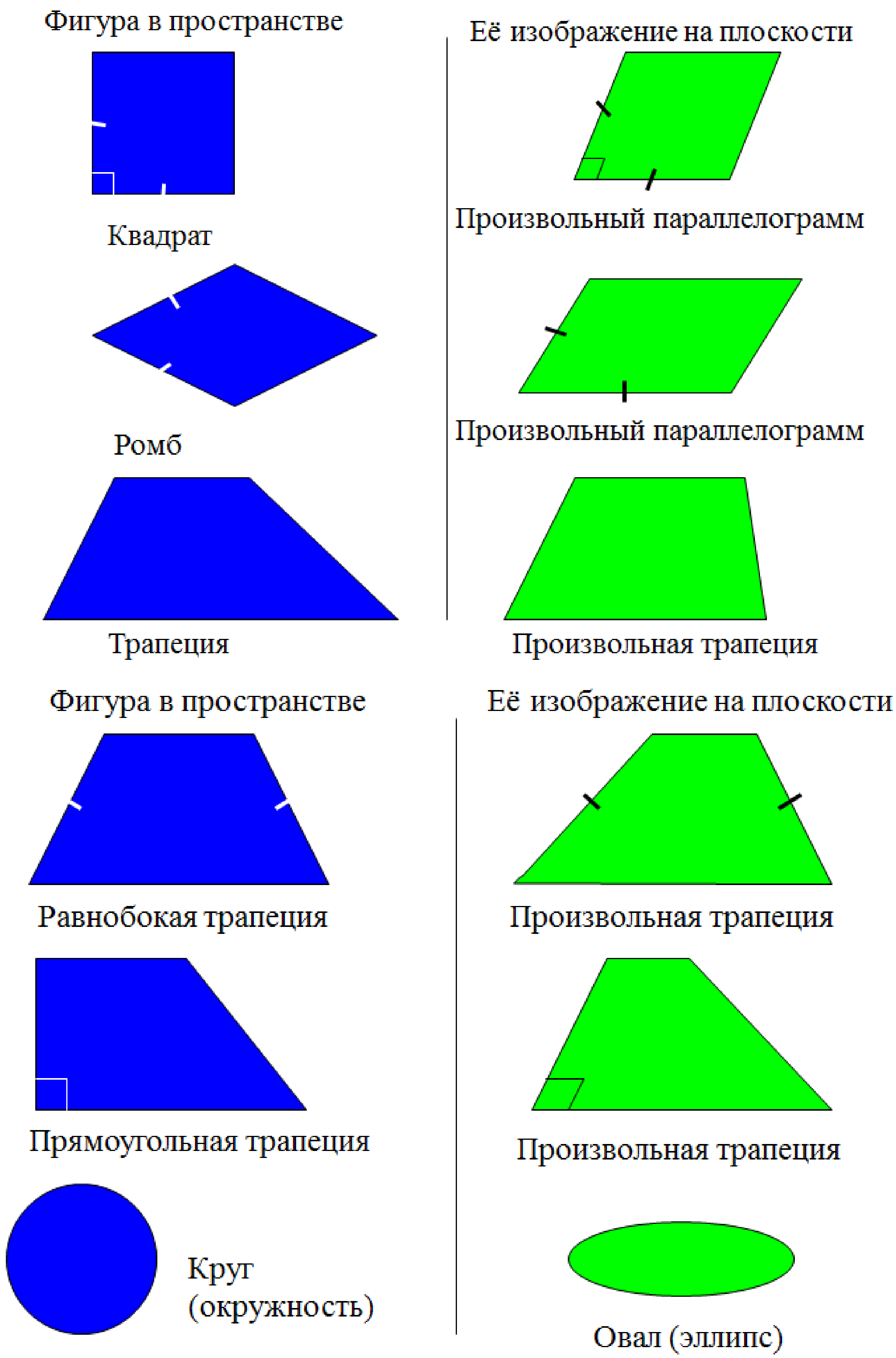
Задание:

1. Верно ли, что при параллельном проектировании проекцией параллелограмма будет произвольный параллелограмм?
2. Каким будет при параллельном проектировании изображение прямоугольника? ромба? квадрата?
3. Как найти при параллельном проектировании проекцию точки пересечения высот равностороннего треугольника?

Далее разберем примеры изображения некоторых плоских фигур:







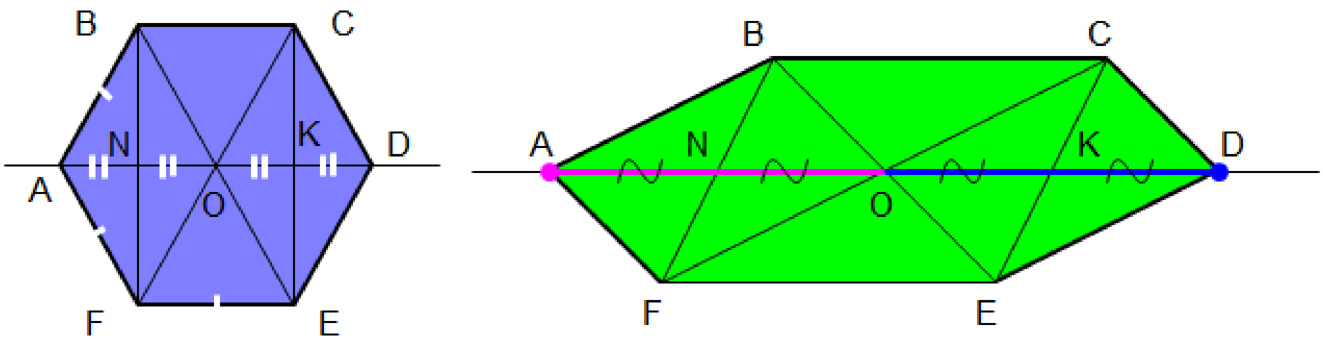
Разберемся, как построить изображение правильного шестиугольника.

Разобьем правильный шестиугольник на три части: прямоугольник FBCE и два равнобедренных треугольника ΔFAB и ΔCDE. Построим вначале изображение прямоугольника FBCE – произвольный параллелограмм FBCE. Осталось найти местоположение двух оставшихся вершин – точек A и D.

Вспомнив свойства правильного шестиугольника, заметим, что: 1) эти вершины лежат на прямой, проходящей через центр прямоугольника и параллельной сторонам BC и FE; 2)OK=KD и ON=NA.

Значит:

1. Находим на изображении точку O и проводим через неё прямую, параллельную BC и FE, получив при этом точки N и K.
2. Откладываем от точек N и K от центра O на прямой такие же отрезки – в итоге получаем две оставшиеся вершины правильного шестиугольника A и D. (слайд 18)



Практическая работа №36

Тема: Действия над векторами в координатной форме.

Цель:
- закрепить навыки выполнения действий в координатной форме.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник П.Т.Апанасов «Сборник задач по математике»

Ход работы:

1. **Запишите ответы на контрольные вопросы.**
   1) Запишите правило алгебраического сложения векторов.
   2) Запишите правило алгебраического вычитания векторов.
   3) Запишите правило умножения вектора на число.
   4) Запишите формулы для вычисления скалярного произведения векторов.
   5) Запишите формулу для вычисления угла между векторами.

Используя справочный материал, выполните задания по вариантам.

1 вариант

1. Даны векторы *a (3; -5; 2), в (0; 7; -1), c* ($\frac{2}{3}$*; 0; 0), d (-2,7; 3,1; 0,5).*

Найти координаты:

а) *a+в*
б) *a+c*
в) *в+c*
г) *d+в*
д) *d+a*
е) *a+в+c*
ж) *в+a+d*
з) *a+в+c+d*

2 вариант

1. Даны векторы *a (5; -1; 1), в (-2; 1; 0), c (0; 0,2; 0), d* ($-\frac{1}{3};2\frac{2}{5};-\frac{1}{7}$).

Найти координаты:

а) *a-в*
б) *в-a*
в) *a-c*
г) *d-a*
д) *c-d*
е) *a-в+c*
ж) *a-в-c*
з) *2a*

1 вариант

1. Даны векторы *a (-1; 1; 1), в (0; 2; -2), c (-3; 2,0), d (-2; 1; -2).*
Найти координаты:
а) 3*a+2в-c*
б) *-a+2c- d*
в) *0,1a+3в+0,7c-5 d*
г) *(2a+3в) -(a-2в)+2(a-в)*

2 вариант

1. Даны векторы *a (1; 1; -1), в (2; 0; -2), c (-3; 0,2), d (2;- 1; -2).*
Найти координаты:
а) 3*a+2в-c*
б) *-a+2c- d*
в) *0,1a+3в+0,7c-5 d*
г) *(2a+3в)-(a-2в)+2(a-в)*

Справочный материал

Если векторы заданы в координатной форме, то операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число можно заменить более простыми арифметическими операциями над координатами этих векторов по следующим правилам.

Правило 1. При сложении векторов их одноименные координаты складываются:

$$\bar{a} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \ \bar{b} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k},$$

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (x_2 + x_1)\cdot\bar{i} + (y_2 + y_1)\cdot\bar{j} + (z_2 + z_1)\cdot\bar{k}$$

$$\bar{c} = (x_2 + x_1, y_2 + y_1, z_2 + z_1)$$

Правило 2. Чтобы вычесть из вектора $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ вектор $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$, нужно вычесть координаты вектора $\bar{b}$ из соответствующих координат вектора $\bar{a}$, т.е.

$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ или

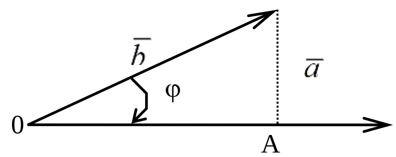
$\bar{a} - \bar{b} = (x_1 - x_2)\cdot\bar{i} + (y_1 - y_2)\cdot\bar{j} + (z_1 - z_2)\cdot\bar{k}$

Правило 3. Чтобы умножить вектор $\bar{a}$ на число λ, нужно умножить на это число его координаты, т.е. если $\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, то $\lambda\cdot\bar{a} = \lambda\cdot x\bar{i} + \lambda\cdot y\bar{j} + \lambda\cdot z\bar{k}$.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число ,(обозначаемое $(\bar{a}\bar{b})$) равное произведению длин векторов на косинус угла между ними: $(\bar{a}b) = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$,

где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$



Свойства скалярного произведения:

1) $(\bar{a}\bar{b}) = (\bar{b}\bar{a})$

2) $(\bar{a}\bar{b}) = 0 \Leftrightarrow \bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны; (или $\bar{a} = 0$, или $\bar{b} = 0$)

3) $(\bar{a}\bar{b}) = |\bar{a}|Пр_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|Пр_{\bar{b}}\bar{a}$

4) $(\lambda\bar{a}\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$, где λ - число

5) $(\bar{a}\bar{a}) = |\bar{a}||\bar{a}| = |\bar{a}|^2 > 0$, если $\bar{a} \neq 0$

6) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}\bar{b}) + (\bar{a}\bar{c})$

Скалярное произведение векторов, заданных координатами

Так как единичные векторы (орты) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ осей *Ox*, *Oy*, *Oz* прямоугольной системы координат взаимноперпендикулярны, то по формуле получим :

$(\bar{i}\bar{j}) = (\bar{j}\bar{i}) = 0$, $(\bar{j}\bar{k}) = (\bar{k}\bar{j}) = 0$, $(\bar{i}\bar{k}) = (\bar{k}\bar{i}) = 0$

Далее, используя свойство скалярного произведения $(\bar{a}\bar{a}) = a^2$ имеем:

$(\bar{i}\bar{i}) = (\bar{j}\bar{j}) = (\bar{k}\bar{k}) = 1$

Пусть $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\bar{b}(x_2, y_2, z_2)$. Найдем произведение этих векторов

$(\bar{a}\bar{b}) = (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k})\ (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов.

Найдем длину вектора $\bar{a}(x, y, z)$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Длина вектора равна квадратному корню из суммы квадратов его координат.

Угол между векторами

Из определения скалярного произведения двух векторов следует, что $\cos\varphi = \frac{(\bar{a}\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ заданы координатами $\bar{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\bar{b}(x_1, y_2, z_2)$, то формула запишется в виде:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1 + y_2 + z_1} \cdot \sqrt{x_2 + y_2 + z_2}}$$

Практическая работа №37

Тема: Вычисление производных.

Цели:

- Закрепить навыки вычисления простейшей производной, производной произведения, частного.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$$

1) $(C)' = 0;$ 2) $(x)' = 1;$ 3) $(x^n)' = n\,x^{n-1};$ 4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$ 5) $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}};$ 6) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	7) $(u^n)' = n u^{n-1} u';$ 8) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}\cdot u';$ 9) $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n}{u^{n+1}}\cdot u';$ 10) $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u';$	11) $(\cos x)' = -\sin x;$ 12) $(\sin x)' = \cos x;$ 13) $(tg\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ 14) $(ctg\,x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$ 15) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ 16) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a};$ 17) $(e^x)' = e^x;$ 18) $(a^x)' = a^x \ln a;$	19) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$ 20) $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$ 21) $(tg\,u)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u';$ 22) $(ctg\,u)' = -\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u';$ 23) $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u';$ 24) $(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a}\cdot u';$ 25) $(e^u)' = e^u \cdot u';$ 26) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$

Найдите производные следующих функций:

Простейшие производные: *f(x)=3* *f(x)=* $\frac{1}{2}$ *f(x)= 6,'* *f(x)=* $3x'$ *f(x)=* $-2x'$ *f(x)=* $1{,}5x'$ *f(x)=* $3x^2+2x'$ *f(x)=* $-5x+4'$ *f(x)=* x^3 *f(x)=* $5-2x'$ *f(x)=* $15x+6x^2-3'$ *f(x)=* $-3x^4-8x+8{,}6'$	Производная произведения: *f(x)=* $(x+1)(x+3)$ *f(x)=* $(x-7)(x-2)$ *f(x)=* $(2x+4)(3x+2)$ *f(x)=* $(6+4x)(2+5x)$ *f(x)=* $(3x-8)(4x+2)$ *f(x)=* $(5-4x)(7-2x)$ *f(x)=* $(x^2+3)(x-4)$ *f(x)=* $(x+7)(x^2-5)$ *f(x)=* $(x^3+1)(5-x^2)$ *f(x)=* $(3-x^2)(6-x^3)$ Производная частного: *f(x)=* $\frac{x+2}{x+3}$ *f(x)=* $\frac{x-5}{x+7}$ *f(x)=* $\frac{2x+1}{3x+2}$ *f(x)=* $\frac{6-4x}{4+2x}$ *f(x)=* $\frac{x^2}{x+2}$ *f(x)=* $\frac{2x}{x-3}$ *f(x)=* $\frac{x+4}{3x}$

	$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

Образцы дифференцирования функции

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = -5x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 7x - 5$

Решение.

$$f'(x) = (-5x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 7x - 5)' = (-5x^4)' + (8x^3)' - (3x^2)' + (7x)' - 5' =$$
$$= -5\cdot 4x^3 + 8\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x + 7 - 0 == -20x^3 + 24x^2 - 6x + 7.$$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = (6-2x)(7+4x)$

Решение.

$$f'(x) = (6-2x)'(7+4x) + (6-2x)(7+4x)' = -2\cdot(7+4x) + 4(6-2x) = -14 - 8x + 24 - 8x =$$
$$= -16x + 10$$

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{2x+7}{5-4x}$.

Решение.

$$f'(x) = \frac{(2x+7)'\cdot(5-4x) - (2x+7)\cdot(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2\cdot(5-4x) + 4(2x+7)}{(5-4x)^2} = \frac{10 - 8x + 8x + 28}{(5-4x)^2} =$$
$$= \frac{38}{(5-4x)^2}$$

Пример 4. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{9}{x^2+6}$.

Решение. $$f'(x) = \frac{9'\cdot(x^2+6) - 9\cdot\left(x^2+6\right)'}{\left(x^2+6\right)^2} = \frac{0 - 9\cdot 2x}{\left(x^2+6\right)^2} = -\frac{18x}{\left(x^2+6\right)^2}.$$

Пример 5. Найти производную функции $f(x) = (6-2x)(7+4x)$

Решение. $$f'(x) = (6-2x)'(7+4x) + (6-2x)(7+4x)' = -2\cdot(7+4x) + 4(6-2x) =$$
$$= -14 - 8x + 24 - 8x = -16x + 10$$

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = -5x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 7x - 5$

Решение. $$f'(x) = (-5x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 7x - 5)' = (-5x^4)' + (8x^3)' - (3x^2)' + (7x)' - 5' =$$
$$-5\cdot 4x^3 + 8\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x + 7 - 0 == -20x^3 + 24x^2 - 6x + 7.$$

Практическая работа №38

Тема: **Касательная к графику функции.**

Цели:

- познакомиться с понятием касательной к графику функции, геометрическим смыслом касательной, формулой уравнения касательной;

- научиться проводить касательные к графику функции в данной точке, выводить уравнение касательной к данной функции в данной точке.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

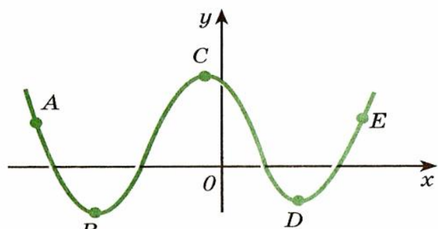
1. Познакомьтесь с основными вопросами темы и рассмотрите пример:

Прямую, проходящую через точку (x_0;f(x_0)), с отрезком которой практически сливается график функции f при значениях x, близких к x_0, называют *касательной к графику функции f в точке (x_0;f(x_0)).*

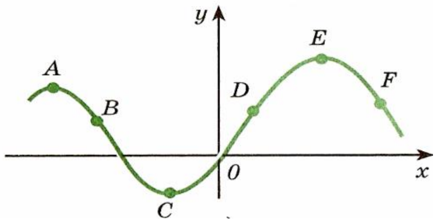
Геометрический смысл производной: Существование производной функции f в точке x_0 эквивалентно существованию (невертикальной) касательной в точке (x_0;f(x_0)) графика, при этом угловой коэффициент касательной равен
f '(x_0)).
Касательная к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку (x_0;f(x_0)) и имеющая угловой коэффициент
f '(x_0).

Выведем уравнение касательной к графику функции f в точке А(x 0;f(x0)).
Уравнение прямой с угловым коэффициентом f '(x0)
имеет вид: *y=f '(x0)·x+b* (y=kx+b-уравнение прямой, к=f '(x0)).
Так как касательная проходит через точку А:
f (x0)=f '(x0)·x+b, откуда b=f(x0)-f '(x0)·x0.
Таким образом уравнение касательной таково:
y=f '(x0)·x-f '(x0)·x0+f (x0)
или
y=f '(x0)·x-f '(x0)·(x-x0)
Найдём уравнение касательной к графику функции f(x)=x3–2x2+1 в точке с абсциссой x0
В этом примере x0=2,
f(x0)= f(2)=23 -2· 22 +1=1,
f '(x)=3x2-4x,
f '(x0)= f '(2)=3·22 -4· 2 =4,
Подставляя числа в уравнение касательной, получаем уравнение:
y=1+4(x-2),
y=4x-7

2. Проведите касательные к графикам в данных точках:



б)



3. Выполните задание: Напишите уравнение касательной к графику функции f в точке с абсциссой x_0

1 вариант

1) f (x) = $\frac{3}{4}$, x_0=1 2) f (x) = x^2 +1, x_0 = -3

3) f (x) = x^3 + 1, x_0 = 2 4) f (x) = x^3 + 1, x_0 =2

5) f (x) = x^2 – 2x, x_0 = -2

2 вариант

1) f (x) = $\frac{2}{x}$, x_0 = -1 2) f (x) = 2x^2 - 1, x_0 = -2

3) f (x) = x^3 – 1, x_0 = 1 4) f (x) = - x^2 + 1, x_0 = -3

1) f (x) = x^2 – 4x +1, x_0 = 2

Практическая работа №39

Тема: Производная сложной функции.

Цели:

- Закрепить навыки вычисления производной сложной функции.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:
Справочный материал

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$			
1) $(C)' = 0;$		11) $(\cos x)' = -\sin x;$	19) $(\cos u)' = -\sin u \cdot u';$
2) $(x)' = 1;$		12) $(\sin x)' = \cos x;$	20) $(\sin u)' = \cos u \cdot u';$
3) $(x^n)' = n\,x^{n-1};$	7) $(u^n)' = n u^{n-1} u';$	13) $(tg\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$	21) $(tg\ u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u';$
4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2};$	8) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u';$	14) $(ctg\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$	22) $(ctg\ u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u';$
5) $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}};$	9) $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n}{u^{n+1}} \cdot u';$	15) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$	23) $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u';$
6) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}};$	10) $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u';$	16) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$	24) $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u';$
		17) $(e^x)' = e^x;$	25) $(e^u)' = e^u \cdot u';$
		18) $(a^x)' = a^x \ln a;$	26) $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'.$

Пусть функция $u = g(x)$ определена на множестве X и U - множество значений этой функции. Пусть, множество U (или его подмножество) является областью определения функции $y = f(u)$. Поставим в соответствие каждому x из X число $f(g(x))$. Тем самым на множестве X будет задана функция $y = f(g(x))$. Ее называют композицией функций или сложной функцией.

В этом определении, если пользоваться нашей терминологией, $y = f(u)$ - внешняя функция, $u = g(x)$ - промежуточный аргумент.

Образцы решения:

1) y=sin(2x+3). Здесь внешняя функция синус: f=sinu, внутренняя — линейная: u=2x+3. Соответственно, производная данной сложной функции есть y'=cos(2x+3)·(2x+3)'=c0s(2x+3)·2=2c0s(2x+3).

2) y=cos(5-7x). Внешняя функция — косинус: f=cosu, внутренняя — линейная: u=5-7x. Поэтому y'=- sin(5-7x)·(5-7x)'=- sin(5-7x)·(-7)=7sin(5-7x).

$$3)\, y = \sqrt{4x^3 - 12x + 8.}$$
$$y' = \frac{1}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} \cdot (4x^3 - 12x + 8)' =$$

$$= \frac{12x^2 - 12}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} = \frac{12x^2 - 12}{2\sqrt{4x^3 - 12x + 8}} = \frac{6x^2 - 6}{\sqrt{4x^3 - 12x + 8}}.$$

$4) y = \ln(5x^7 - 3x - 11)$

$f = \ln u, u = 5x^7 - 3x - 11, \Rightarrow$

$$y' = \frac{1}{5x^7 - 3x - 11} \cdot (5x^7 - 3x - 11)' = \frac{35x^6 - 3}{5x^7 - 3x - 11}.$$

$5) y = ctg\frac{4x}{11}$

$$f = ctgu, u = \frac{4x}{11}, \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2\frac{4x}{11}} \cdot (\frac{4x}{11})' = -\frac{4}{11\sin^2\frac{4x}{11}}.$$

$6) y = tg(5x + \frac{\pi}{8})$

Здесь f=tgu, u=5x+π/8. π- число, значит, π/8 — тоже число, то есть (5x+π/8)’=5

$$y' = \frac{1}{\cos^2(5x + \frac{\pi}{8})} \cdot (5x + \frac{\pi}{8})' = \frac{5}{\cos^2(5x + \frac{\pi}{8})}.$$

$7) y = (3x - 17)^{10}$

$f = u^{10}, u = 3x - 17, \Rightarrow y' = 10(3x - 17)^9 \cdot (3x - 17)' =$

$= 10(3x - 17)^9 \cdot 3 = 30(3x - 17)^9.$

Найти производную сложной функции

А. 1) $y=(x^2-5x+8)^6$; 2) $y=(x^3-1)^6$; 3) $y=\frac{1}{(x^2-1)^4}$.

Б. 1) $y=(ax^2+bx+c)^k$; 2) $y=\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^k$.

4. Найдите производную функции:

А. 1) $y=\sqrt{2x}$; 2) $y=3\sqrt{5x-1}$; 3) $y=-2\sqrt{1-x}$; 4) $y=\sqrt{x^2+1}$.

Б. 1) $y=\sqrt{4-x^2}$; 2) $y=(x^2+6)\sqrt{x^2-3}$; 3) $y=\sqrt{(x^4-1)^{-1}}$; 4) $y=\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$.

В. 1) $y=\frac{1}{\sqrt{ax+c}}$; 2) $y=(\sqrt{3x})^{-1}-\sqrt{3x}$; 3) $y=\frac{1+2x}{\sqrt{1-2x}}$.

Ответы. **1. А.** 1) $6x$; 3) $-10x^{-6}$; 4) $\frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 5) $-2x^{-\frac{7}{5}}$.

Б. 1) $-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x^2}}$; 2) $3\sqrt{2x}$; 3) $3{,}5x^2\sqrt{x}$; 4) $-\frac{5}{x^3\sqrt{x}}$.

В. 1) $-\frac{5}{6}x^{-\frac{11}{6}}$; 2) $\frac{1}{12}x^{-\frac{5}{6}}$; 3) $-\frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}}$. **2. А.** 1) $12x^2-4x+1$.

Б. 3) $5x^4+4x^3+3x^2-2x-1$. **В.** 2) $0{,}75x^{-0{,}25}+x^{-\frac{4}{3}}-4x^{-3}x^{-2}$.

3. А. 2) $18x^2(x^3-1)^5$. **Б.** 1) $k(ax^2+bx+c)^{k-1}(2ax+b)$;

2) $\frac{2ak(a+x)^{k-1}}{(a-x)^{k+1}}$. **4. А.** 2) $\frac{15}{2\sqrt{5x-1}}$; 3) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$; 4) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Б. 1) $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$; 2) $\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}}$; 3) $-\frac{2x^3\sqrt{x^4-1}}{(x^4-1)^2}$; 4) $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

В. 3) $\frac{(3-2x)\sqrt{1-2x}}{(1-2x)^2}$.

Практическая работа №40

Тема: **Признаки возрастания и убывания функции.**

Цели:
- познакомиться с признаками возрастания и убывания функции;
- научиться находить промежутки возрастания и убывания функции через производную.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

1. Запишите достаточный признак возрастания функции.
2. Запишите достаточный признак убывания функции.
3. Рассмотрите и запишите в тетрадь пример нахождения промежутков возрастания и убывания функции.

4. Найдите промежутки возрастания и убывания функций:

1) *f(x)=6+4x*
2) $f(x)=6x^3-5$
3) $f(x)=3x^2+36x-1$
4) $f(x)=-5x^2-2x+2$
5) $f(x)=x^3-4x^2$
6) $f(x)=x^2-x$
7) $f(x)=5x^2-3x-1$
8) $f(x)=x^2+6x-4$
9) $f(x)=x^3-6x^2+9$

5.Выполните эскиз графика, используя следующие данные:

Изобразите график непрерывной функции *y=f(x)*, зная, что:

1) Область определения функции есть промежуток *[-6;1];*
2) Значения функции составляют промежуток *[-2;4];*
3) $f'(x)<0$ для любого *x* из промежутка *(-4;1),* $f'(x)>0$ для любого *x* из промежутков *(-6;4) и (-1;1),* $f'(x)=0$ при *x=-4,*
4) нули функции: *x=-4 и x=0*

Правило нахождения промежутков возрастания и убывания $y = f(x)$

1. Найти производную $f'(x)$ данной функции, а затем определить точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует (критические точки).
2. Исследовать знак $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f'(x)$. В тех интервалах, где $f'(x) > 0$, функция возрастает, а в тех интервалах, где $f'(x) < 0$, - убывает.

Пример 1 Найти интервалы монотонности функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

1. Находим производную и приравниваем её нулю:

$f'(x) = x^2 - 4x + 3$; $x^2 - 4x + 3 = 0$, откуда $x_1=1$ и $x_2=3$. Этими точками числовая прямая разбивается на интервалы (-∞; 1); (1; 3), (3;+∞), в каждом из которых производная сохраняет знак.

2. Определим знак производной $f'(x) = (x-1)(x-3)$ в этих интервалах.

Пусть x=0, тогда $f'(0) = (0-1)(0-3) > 0$;

пусть x=2, тогда $f'(2) = (2-1)(2-3) < 0$;

пусть x=4, тогда $f'(4) = (4-1)(4-3) > 0$.

Отсюда следует, что данная функция в интервале (-∞; 1) возрастает, в интервале (1; 3) убывает и в интервале (3;+∞) снова возрастает.

Практическая работа №41

Тема: **Критические точки. Точки максимума и минимума.**

Цели:
- познакомиться с понятием критической точки; правилом нахождения точек максимума и минимума, экстремумов функции:
- научиться находить точки максимума и минимума функции через производную, экстремумы функции.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник А.Н.Колмагоров 10-11кл «Алгебра и начала анализа».

Ход работы:

1.Запишите ответы на контрольные вопросы.

1) Запишите определение критических точек функции.
2) Запишите необходимое условие экстремума.
3) Запишите признак максимума функции.
4) Запишите признак минимума функции.
5) Изучите правило нахождения экстремумов функции с помощью производной.
6) Рассмотрите и запишите пример нахождения точек максимума, минимума и экстремумов функции с помощью производной.

2. Найдите промежутки монотонности функции и определить ее точки экстремума

1) $f(x)=3x+6$;
2) $f(x)=x^2-5x+5$;
3) $f(x)=x^3+x^2-5x+3$.
4) $f(x)=2x-5$;
5) $f(x)=x^2+4x-5$;
6) $f(x)=x^3-x^2-x+3$.

Справочный материал

Правило нахождения экстремумов функции с помощью производной.

1.Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует.

2.Исследовать знак $f'(x)$в некоторой окрестности каждой из критических точек. Если производная изменяет знак при переходе через такую точку, то функция имеет в этой точке экстремум, а если знак не изменяется, то функция в этой точке экстремума не имеет. При этом если переход через рассматриваемую точку слева на право знак

$f'(x)$изменяется с минуса на плюс, то в этой точке достигается минимум, а если плюса на минус –то максимум.

Пример 1. Найти экстремумы функции $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+1$

Решение.

1. Найдём производную: $f'(x)=2x^2-2x-4$. Далее, имеем $2x^2-2x-4=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=2-$критические точки. Эти точки разбивают область определения функции на три интервала (-8; -1), (-1; 2),(2; $+\infty$).
2. Определим знаки производной в окрестностях критических точек. В интервале (-∞; -1) возьмём произвольную точку x=-2; при x=-2 имеем $f'(-2)>0$. В интервале (-1; 2) возьмём x=0; при x=0 имеем $f'(0)=-4<0$. Так как производная при переходе через точку x=-1 меняет знак с плюса на минус, то функция в точке x=-1 имеем максимум.
3. Вычислим максимальное значение функции $f(-1)=3\frac{1}{3}$.
4. Выше мы установили, что в интервале (-1; 2) производная $f'(x)<0$. Определением знак производной в интервале (2; $+\infty$); полагая x=3, находим $f'(3)>0$. Так как производная при переходе через точку x=2 имеет минимум.
5. Вычислим минимальное значение функции: $f(2)=-5\frac{2}{3}$.

Пример 2. Найти экстремумы функции $f(x)=(x-1)^5$.

Решение

1. Находим $f'(x)=5(x-1)^4$; далее имеем $5(x-1)^4=0$, откуда x=1. Эта критическая точка разбивает область определения функции на интервалы
(-∞; 1)и(1; ∞).

2. Если x=0, то $f'(0)=5>0$; если x=2, то $f'(2)=5>0$. Так как знак производной слева и справа от критической точки x=1 не изменяется , то в точке x=1 функция не имеет экстремума.

Практическая работа №42

Тема: Исследование функции и построение графиков.

Цель:

- используя схему исследования функции научиться строить график функции по проведённому исследованию.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: схема исследования функции, инструкционная карта

Ход работы:

1. Используя данные о производной y′, приведенные в таблице, ответить на вопросы:
а) промежутки возрастания;
б) промежутки убывания;
в) точки максимума;
г) точки минимума.

x	(-∞;-5)	-5	(-5;-2)	-2	(-2;8)	8	(8;+∞)
y′	+	0	-	0	+	0	+

2. Используя схему исследования функции и образец решения задания, построить графики функций по проведённому исследованию.
$f(x)=x^3-3x+4$
$f(x)=-x^3+3x-4$
$f(x)=x^2-6x+2$

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки пересечения графика с осями координат.
3. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума и значения функции в этих точках.
5. Используя полученные сведения построить график функции.

Правило нахождения промежутков возрастания и убывания $y = f(x)$

3. Найти производную $f'(x)$ данной функции, а затем определить точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует (критические точки).
4. Исследовать знак $f'(x)$ в промежутках, на которые критические точки делят область определения функции $f'(x)$. В тех интервалах, где $f'(x) > 0$, функция возрастает, а в тех интервалах, где $f'(x) < 0$, - убывает.

Правило нахождения экстремумов функции с помощью производной.

1.Найти критические точки функции, т.е. точки, в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

2.Исследовать знак $f'(x)$ в некоторой окрестности каждой из критических точек. Если производная изменяет знак при переходе через такую точку, то функция имеет в этой точке экстремум, а если знак не изменяется, то функция в этой точке экстремума не имеет. При этом если переход через рассматриваемую точку слева на право знак $f'(x)$ изменяется с минуса на плюс, то в этой точке достигается минимум, а если плюса на минус –то максимум.

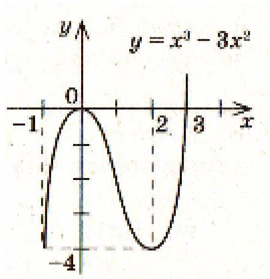
Пример: Исследовать по схеме функцию $y=x^3-3x^2$ и построить её график.

1. D(f)=R,
2. Найдем абсциссы точек пересечения графика с осью Ox: $x^3-3x^2=0$, $x^2(x-3)=0$, x=0 или x=3.
   Найдем ординаты точек пересечения графика с осью Oy: $y=0^3-0\cdot 0^2=0$.
3. Определяем четность, нечетность и периодичность функции: т.к. $f(-x)=(-x)^3-3(-x)^2=-x^3-3x^2$, то функция ни четная, ни нечетная, функция непериодическая.

4. Находим промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы функции и составим таблицу.
   Найдем производную $f'(x)=(x^3-3x^2)'=3x^2-6x=3x(x-2)$, найдем критические точки $f'(x)=0$, $3x(x-2)=0$, $x=0$ или $x=2$

x	$(-\infty;0)$	0	(0;2)	2	$(2;\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↑	0	↓	-4	↑
		max		min	

5. Используя полученные сведения, построим график функции $f(x)=x^3-3x^2$



Практическая работа №43

Тема: Площадь криволинейной трапеции.

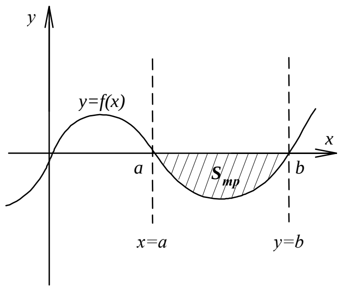
Цель:
- научиться применять понятие определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

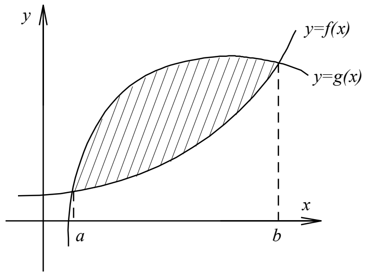
Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, учебник «Алгебра и начала анализа» 10-11кл под ред. А.Н.Колмагорова

Ход работы:

I вариант	**II вариант**
1.Контрольные вопросы	
а) что такое криволинейная трапеция? б) записать формулы для вычисления криволинейных трапеций следующего вида:	



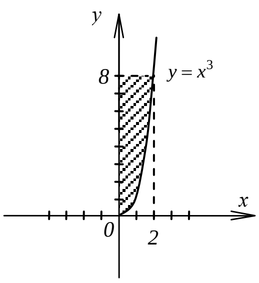


2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

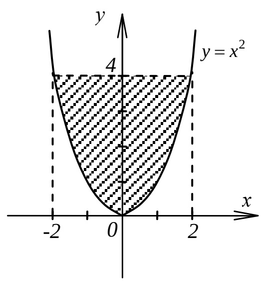
1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = 4$; 2) $y = x^3 + 2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$; 3) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;	1) $y = x^2$, $y = 0$, $x = -3$; 2) $y = x^3$, $y = 0$, $x - 3$, $x = 1$; 3) $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\dfrac{\pi}{4}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$.

3. Найти площадь фигуры, изображенной на заданном рисунке:

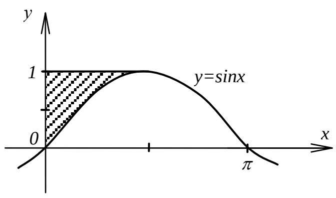
1)



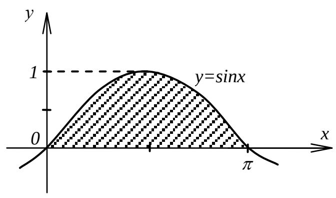
2)



3)



4)



Площадь криволинейной трапеции

Определённый интеграл применяют для решения геометрических и физических задач. Например, вычисление площадей фигур, объёмов тел вращения, работы переменной силы, расстояния при прямолинейном перемещении, длины дуги плоской кривой, объёма тел, площади поверхности вращения, статических моментов и координат центра тяжести плоской кривой и многие другие прикладные задачи.

Вычисление определённого интеграла.

Для вычисления определённого интеграла от функции f(x) на отрезке $[a;b]$ применяют формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

т.о. для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ надо найти соответствующий неопределённый интеграл, а затем вычислить разность значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Формулу Ньютона-Лейбница также записывают в виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

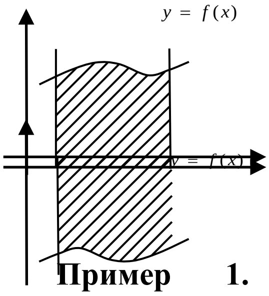
Вычисление площадей плоских фигур

Геометрический смысл определённого интеграла: определённый интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции.

Определим криволинейные трапеции с основаниями на оси ох и оси оу и соответствующие формулы для вычисления их площадей.

Определение. Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $f(x) \geq 0$, прямыми

$x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и осью ох, называется криволинейной трапецией (с основанием на оси ох).



$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $x = 2$, $y = 0$, $x = 0$.

Построим линии, ограничивающие фигуру.

$y = x^2 + 1$ – парабола, симметричная относительно оси оу, вершина (0;1).

$x = 2$ – прямая, проходящая через точку (2;0), параллельная оси оу.

$y = 0$ – аналитическое выражение оси ох.

$x = 0$ – аналитическое выражение оси оу.

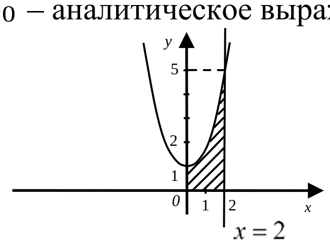


Рис. 5.

Построенная фигура (рис.5) является криволинейной трапецией с основанием на оси ох, поэтому её площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx.$$

$f(x)=x^2+1$, $a=0$, $b=2$.

Тогда $S=\int_0^2 (x^2+1)dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2+\left.x\right|_0^2=\frac{8}{3}+2=2\frac{2}{3}+2=4\frac{2}{3}$ (кв. ед.).

Ответ: $4\frac{2}{3}$ кв. ед.

Практическая работа №44

Тема: Изучение многогранника и призмы.

Цели:
- изучить материал по теме:
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:

Задание: Изучите теоретический материал, ответьте на контрольные вопросы, выполните необходимые чертежи.

1. Что называют многогранником, какие виды многогранников вы знаете?
2. Запишите основные элементы многогранника, покажите их на чертеже.
3. Какой многогранник называется призмой, какие виды призм вы знаете? Выполните чертежи?
4. Какая призма называется прямой или наклонной? Выполните чертежи.
5. Что такое высота призмы? Покажите на чертеже.

Теоретический материал

Определение. Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником.

Примеры многогранников

Рассмотрим следующие примеры многогранников:

1. **Тетраэдр** *ABCD* – это поверхность, составленная из четырех треугольников: *ABC*, *ADB*, *BDC* и *ADC* (рис. 1).

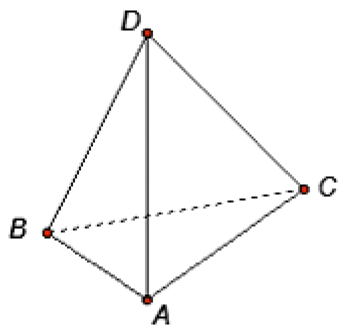


рис. 1

2. **Параллелепипед** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – это поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 2).

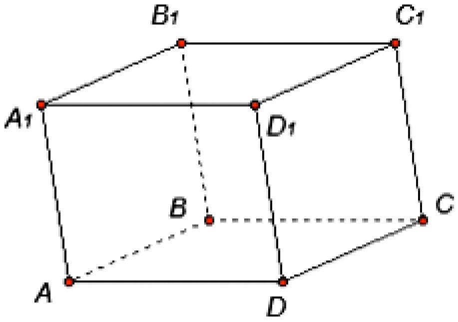


рис. 2

Основные элементы многогранников

Основными элементами многогранника являются грани, ребра, вершины.

Грани – это многоугольники, составляющие многогранник.

Ребра – это стороны граней.

Вершины – это концы ребер.

Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ (рис. 1). Укажем его основные элементы.

Грани: треугольники ABC, ADB, BDC, ADC.

Ребра: AB, AC, BC, DC, AD, BD.

Вершины: A, B, C, D.

Рассмотрим параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).

Грани: параллелограммы AA_1D_1D, D_1DCC_1, BB_1C_1C, AA_1B_1B, $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$.

Ребра: AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AD, A_1D_1, B_1C_1, BC, AB, A_1B_1, D_1C_1, DC.

Вершины: A, B, C, D, A_1,B_1,C_1,D_1.

Треугольная призма

Важным частным случаем многогранника является призма.

Рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 3).

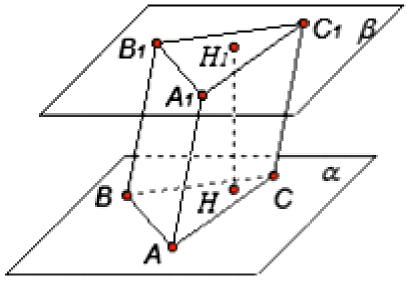


рис. 3

Равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в параллельных плоскостях α и β так, что ребра AA_1, BB_1, CC_1 параллельны.

То есть $ABCA_1B_1C_1$ – треугольная призма, если:

1) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

2) Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ расположены в параллельных плоскостях α и β: $ABC \parallel A_1B_1C$ (α ∥ β).

3) Ребра AA_1, BB_1, CC_1 параллельны.

ABC и $A_1B_1C_1$ – основания призмы.

AA_1, BB_1, CC_1 – боковые ребра призмы.

Если с произвольной точки H_1 одной плоскости (например, β) опустить перпендикуляр HH_1 на плоскость α, то этот перпендикуляр называется высотой призмы.

Определение. Если боковые ребра перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, а в противном случае – наклонной.

Прямая призма

Рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 4). Эта призма – прямая. То есть, ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Например, ребро AA_1 перпендикулярно плоскости ABC. Ребро AA_1 является высотой этой призмы.

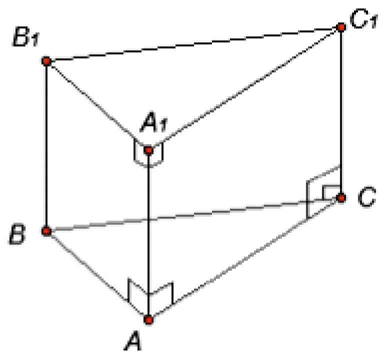


рис. 4

Заметим, что боковая грань AA_1B_1B перпендикулярна к основаниям ABC и $A_1B_1C_1$, так как она проходит через перпендикуляр AA_1 к основаниям.

Наклонная призма

Теперь рассмотрим наклонную призму $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 5). Здесь боковое ребро не перпендикулярно плоскости основания. Если опустить из точки A_1 перпендикуляр A_1H на ABC, то этот перпендикуляр будет высотой призмы. Заметим, что отрезок AH – это проекция отрезка AA_1 на плоскость ABC.

Тогда угол между прямой AA_1 и плоскостью ABC это угол между прямой AA_1 и её AH проекцией на плоскость, то есть угол A_1AH.

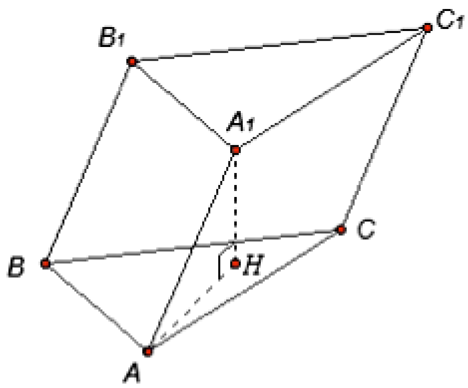


рис. 5

Четырехугольная призма

Рассмотрим четырехугольную призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 6). Рассмотрим, как она получается.

1) Четырехугольник $ABCD$ равен четырехугольнику $A_1B_1C_1D_1$: $ABCD = A_1B_1C_1D_1$.

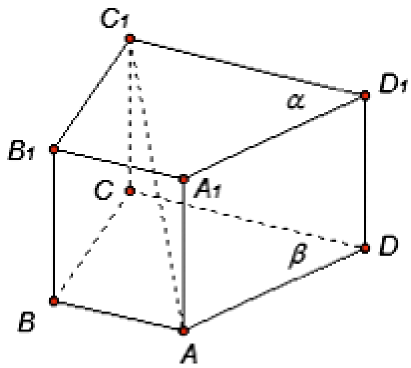
2) Четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ лежат в параллельных плоскостях α и β: $ABC \parallel A_1B_1C$ (α ‖ β).

3) Четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ расположены так, что боковые ребра параллельны, то есть: $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$.

Определение. Диагональ призмы – это отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.

Например, AC_1 – диагональ четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Определение. Если боковое ребро AA_1 перпендикулярно плоскости основания, то такая призма называется прямой.



Практическая работа №45

Тема: Изучение пирамиды. Усеченная пирамида.

Цели:

- изучить материал по теме

- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:

Задание: Изучите теоретический материал, ответьте на контрольные вопросы, выполните необходимые чертежи.

1. Что называют пирамидой, какие виды пирамид вы знаете?
2. Запишите основные элементы пирамиды, покажите их на чертеже.
3. Какая пирамида называется правильной? Что такое апофема?Выполните чертежи.
4. Что такое высота пирамиды? Покажите на чертеже.
5. Какая пирамида называется усеченной? Покажите основные элементы усеченной пирамиды на чертеже.

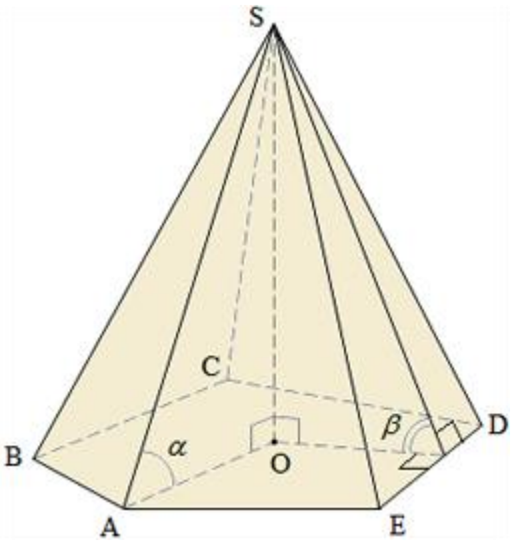
Теоретический материал

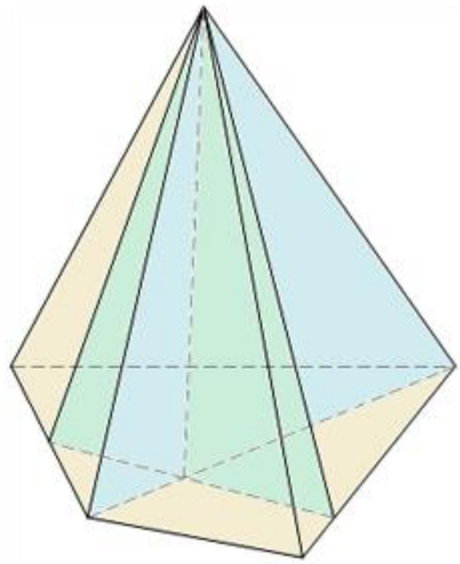
Пирамидой (например, SABCDE) называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (пятиугольник ABCDE) – основания пирамиды, точки (S), не лежащей в плоскости основания,– вершины пирамиды и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

Отрезки (SA, SB, SC, SD, SE), соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются боковыми ребрами.

Поверхность пирамиды состоит из основания (пятиугольник ABCDE) и боковых граней. Каждая боковая грань – треугольник. Одной из его вершин является вершина пирамиды, а противолежащей стороной – сторона основания пирамиды:

ΔSAB, ΔSBC, ΔSCD, ΔSDE, ΔSEA – боковые грани. Боковой поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.

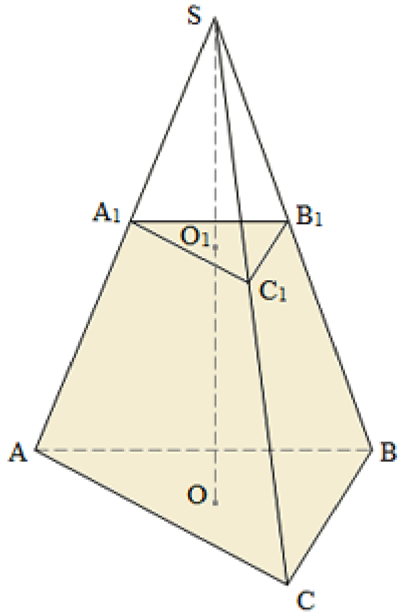




Высотой пирамиды (SO) называется перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания.

Пирамида называется *n*-угольной, если ее основанием является *n*-угольник. Треугольная пирамида называется также тетраэдром.

Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через ее вершину, представляют собой треугольники. В частности, треугольниками являются диагональные сечения. Это сечения плоскостями, проходящими через два несоседних боковых ребра пирамиды.



Плоскость, которая пересекает пирамиду и параллельна её основанию, делит её на две части:

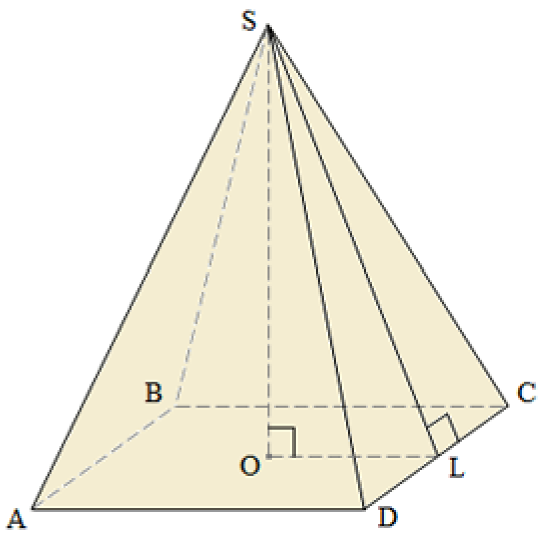
пирамиду, подобную данной ($SA_1B_1C_1$) и

многогранник, называемый усеченной пирамидой ($ABCA_1B_1C_1$).

Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях (ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$), называются основаниями, остальные грани (AA_1B_1B, AA_1C_1C, BB_1C_1C) называются боковыми гранями.

Основания усеченной пирамиды представляют собой подобные многоугольники, боковые грани – трапеции.

Высота усеченной пирамиды (OO_1) – это расстояние между плоскостями её оснований.



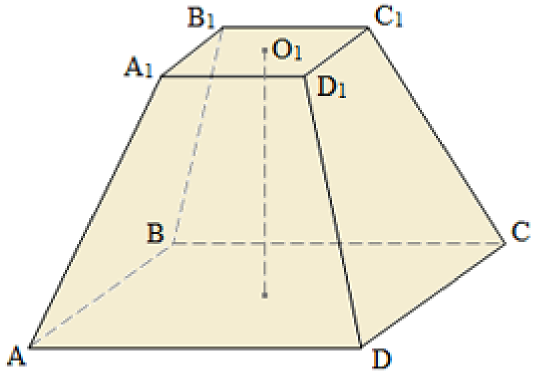
Пирамида (например, SABCD) называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник (ABCD – квадрат), а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника (O – центр описанной и вписанной окружностей основания).

Осью правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту.

Боковые ребра правильной пирамиды равны.

Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники.

Высота боковой грани правильной пирамиды (SL), проведенная из ее вершины к стороне основания, называется апофемой.



Усеченная пирамида (например, $ABCDA_1B_1C_1D_1$), которая получается из правильной пирамиды, также называется правильной.

Боковые грани правильной усеченной пирамиды (AA_1B_1B, AA_1C_1C, DD_1C_1C, AA_1D_1D) – равные равнобокие трапеции; их высоты называются апофемами.

Практическая работа №46

Тема: Решение задач по теме: «Призма и пирамида».

Цели:
- закрепить изученный материал при решении задач по теме: «Призма и пирамида»;
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:

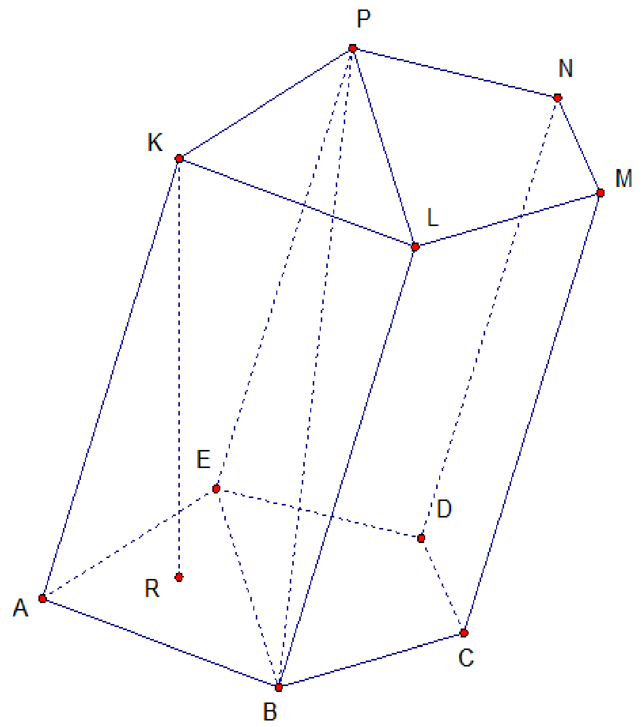
1. **Решите задачи:**

1) В правильной четырёхугольной призме площадь основания равна 144см^2, а высота равна 14см. Определить диагональ этой призмы.
2) Определить диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8см, а диагональ боковой грани равна 7см.
3) Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы равны 8см и 5см, высота 2см. Найти сторону основания.

4) Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7см, а сторона основания равна 8см. Определить боковое ребро.
5) Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 6см и 8см, каждое боковое ребро пирамиды равно 13см. Вычислить высоту пирамиды.

Справочный материал

П р и з м о й **называется многогранник, у которого две грани - равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.**

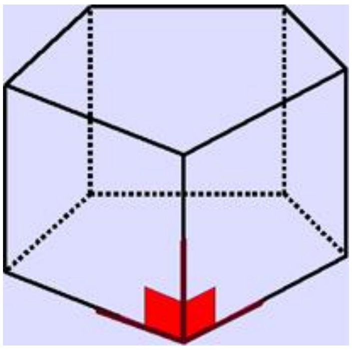


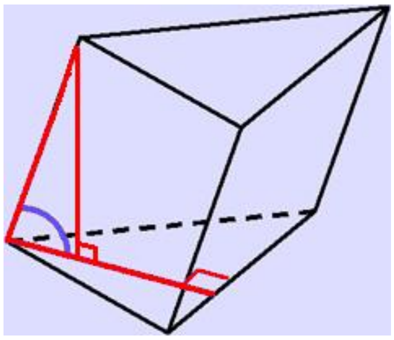
Многоугольники ABCDE и A_1 B_1 C_1 D_1 E_1, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***основаниями призмы, перпендикуляр KR, опущенный из какой-нибудь точки оного основания на плоскость другого называется высотой призмы. Параллелограммы ABLK, BCML, CDNM, DEPN, EAKP называются боковыми гранями призмы, а их стороны AK, BL, CM, DN, EP, соединяющие соответствующие вершины оснований, называются боковыми рёбрами. У призмы все боковые рёбра равны, как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями. Отрезок прямой, соединявший какое-нибудь две вершины, не прилежащие к одной грани, называется диагональю призмы. Таков, например, отрезок PB.***

Плоскость, проведённая через какие-нибудь два боковых ребра, не прилежащие к одной боковой грани призмы (например, через рёбра AK и CM) называется диагональной плоскостью (на рисунке не показанной).

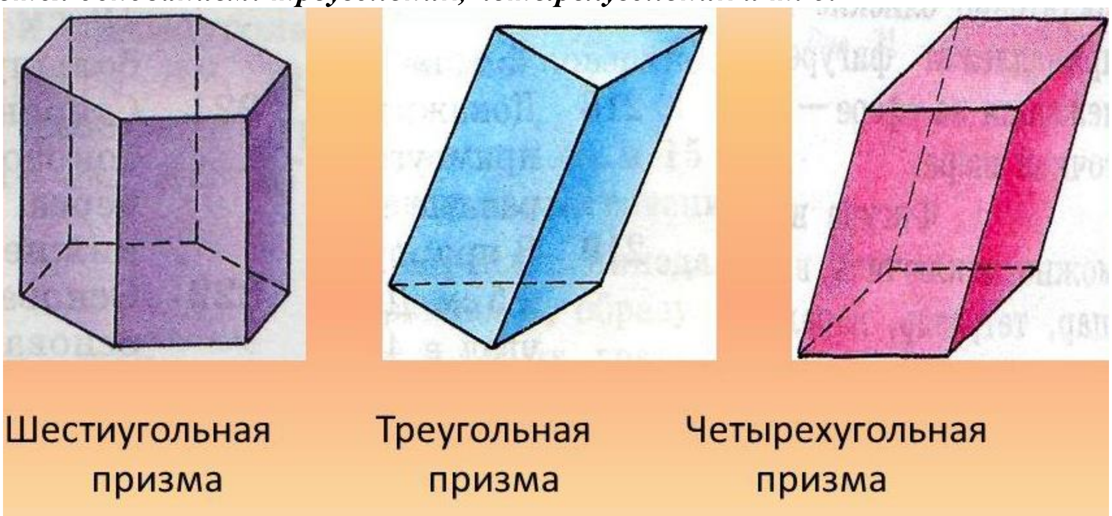
Призма называется прямой или наклонной, смотря по тому, будут ли её боковые рёбра перпендикулярны или наклонны к основаниям. У прямой призмы боковые грани - прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

Прямая ***Наклонная***

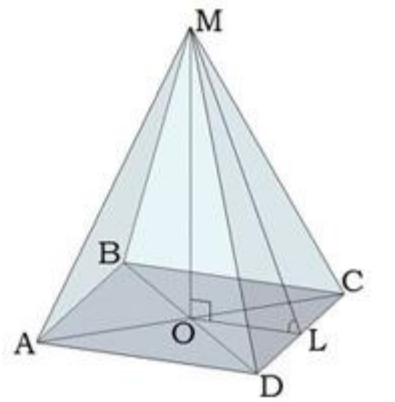




Прямая призма называется правильной, если её основания - правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани - равные ***прямоугольники. Призмы бывают треугольные, четырёхугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием: треугольник, четырёхугольник и т. д.***



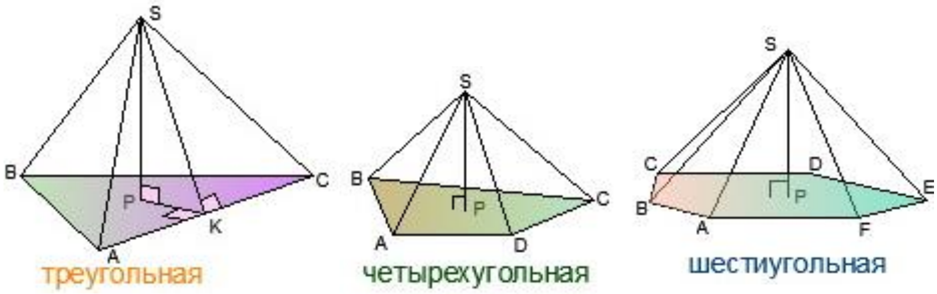
Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая *основанием* (ABCD), есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые *боковыми* (ABM, BMC, DMC, AMD) - треугольники, имеющие общую вершину.



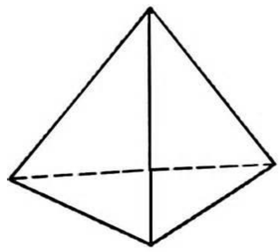
Общая вершина *M* боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр *MO*, опущенный из вершины на плоскость основания называется её *высотой.*

Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишут сначала ту, которой обозначена вершина (MABCD). Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания, например, через диагональ *BD*, называется диагональной плоскостью (BMD).

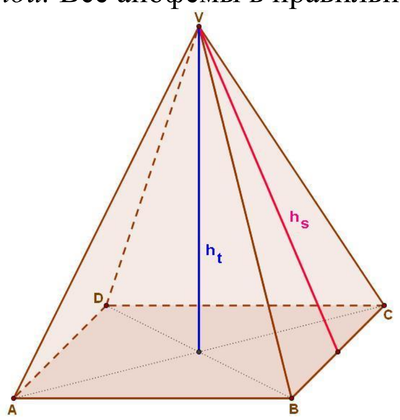
Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием – треугольник, четырёхугольник и т. д.



Треугольная называется иначе *тетраэдром***;** все четыре грани у такой пирамиды – треугольники.



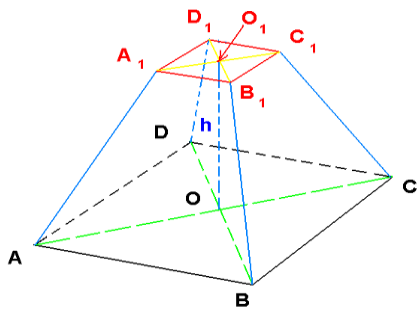
Пирамида называется *правильной*, если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой (как наклонные с равными проекциями). Поэтому все боковые грани правильной пирамиды являются равнобедренными треугольниками. Высота ML каждого из этих треугольников называется *апофемой.* Все апофемы в правильной пирамиде равны.



Правильная пирамида

Усечённая пирамида

Часть пирамиды, заключённая между основанием (*ABCD*) и секущей плоскостью ($A_1B_1C_1D_1$), параллельной основанию, называется *усечённой пирамидой***.** Параллельные грани называются *основаниями***,** а отрезок перпендикуляра OO_1, опущенного из какой-нибудь точки O_1 основания $A_1B_1C_1D_1$ на другое основание, - *высотой* усечённой пирамиды. Усечённая пирамида называется *правильной***,** если она составляет часть правильной пирамиды.



Практическая работа №47

Тема: Изучение цилиндрической поверхности и цилиндра.

Цели:
- изучить материал по теме,
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:

Задание: Изучите теоретический материал, ответьте на контрольные вопросы, выполните необходимые чертежи.

1. Понятие цилиндрической поверхности, цилиндра (чертёж).
2. Что называют образующей и направляющей в цилиндре? Показать на чертеже.
3. Что называют боковой поверхностью и основаниями цилиндра?
4. Виды цилиндров, прямой круговой цилиндр (чертеж).
5. Получение прямого кругового цилиндра.
6. Что такое высота цилиндра? Показать на чертеже.
7. Сечения цилиндра, показать на чертеже.

Теоретический материал

Определение. Цилиндрической поверхностью называется поверхность (рис. 18), образованная прямыми (образующими), параллельными некоторой данной прямой L и пересекающими данную линию C (направляющую).

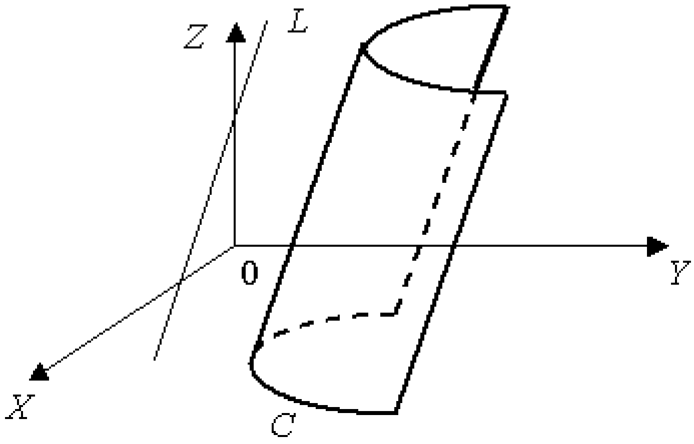


Рис. 18

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИЛИНДРА И ЕГО ЭЛЕМЕНТОВ

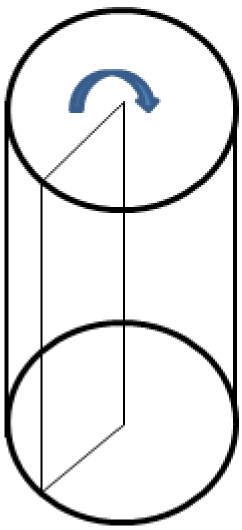
Цилиндр (круговой цилиндр) – тело, которое состоит их двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги называются ***основаниями цилиндра***, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, - **образующими цилиндра**. Эти отрезки образуют цилиндрическую поверхность, являющуюся ***боковой поверхностью цилиндра***.

Полная поверхность цилиндра состоит из оснований и боковой поверхности.

Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны к плоскости оснований.

Прямой цилиндр наглядно можно представить как тело, полученное в результате вращения прямоугольника вокруг стороны как оси.



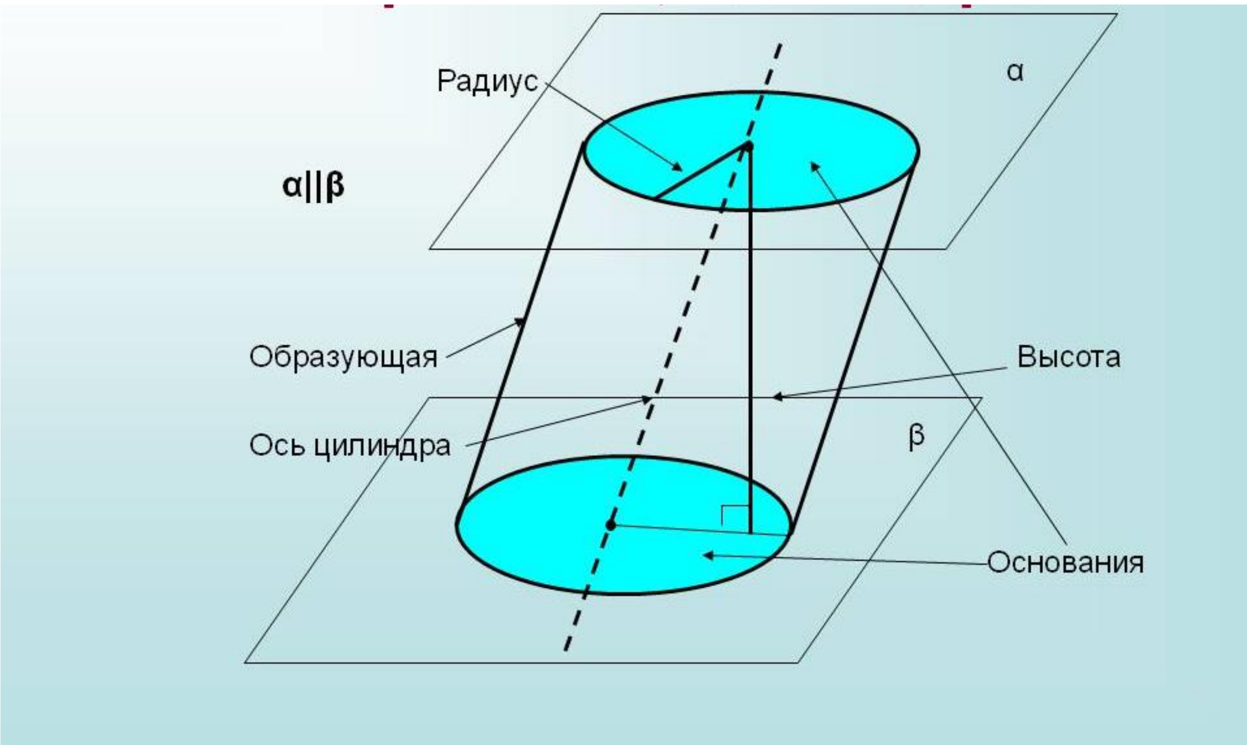
Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры основания. Она параллельна образующим.

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси, представляет собой прямоугольник. Две стороны его – образующие цилиндра, а две другие – параллельные хорды оснований. Осевое сечение цилиндра – это сечение плоскостью, проходящей через его ось.

Касательной плоскостью к цилиндру называется плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.



Практическая работа №48

Тема: Изучение конической поверхности и конуса.

Цели:
- изучить материал по теме,
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

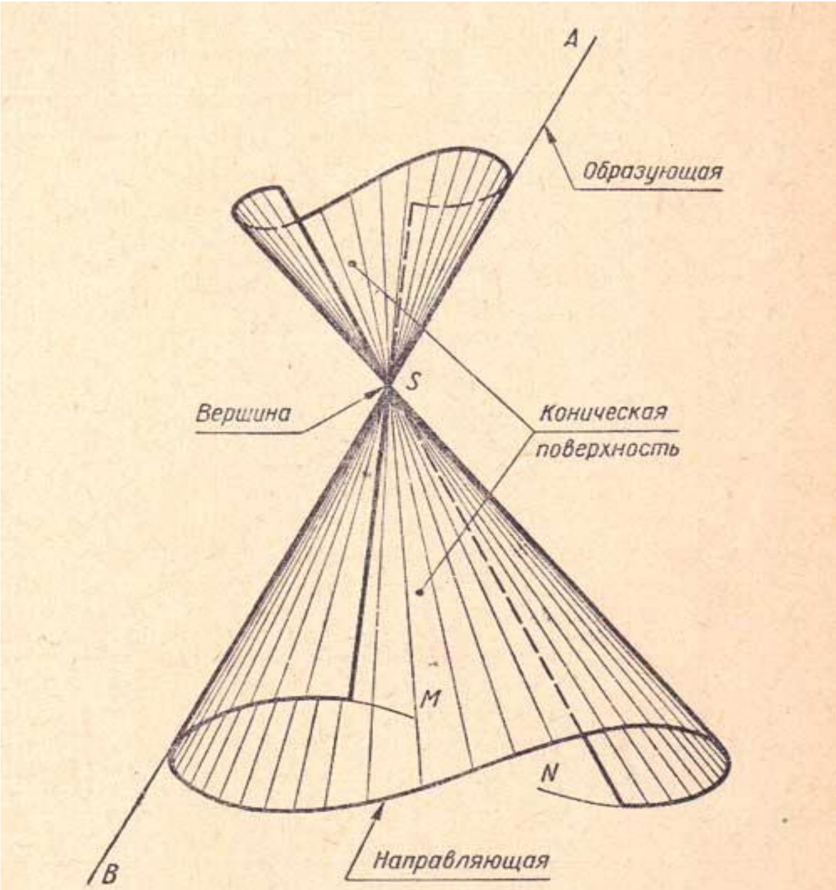
Ход работы:

Задание: Изучите теоретический материал, ответьте на контрольные вопросы, выполните необходимые чертежи.

1. Понятие конической поверхности, конуса (чертёж).
2. Что называют боковой поверхностью и основанием конуса?
3. Прямой круговой конус (чертеж).
4. Получение прямого кругового конуса.
5. Что такое высота конуса? Показать на чертеже.
6. Сечение прямого кругового конуса, показать на чертеже.
7. Какой конус называется усеченным? Получение усеченного конуса.

Теоретический материал

Конической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой (АВ), перемещающейся в пространстве так, что она при этом постоянно проходит через неподвижную точку S и пересекает данную линию MN.



Конусом называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью, пересекающей все образующие этой полости и не проходящей через вершину.

Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется *основанием конуса*.

Высота конуса – это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания.

Часть конической поверхности, расположенная между вершиной и плоскостью основания, называется *боковой поверхностью конуса*.

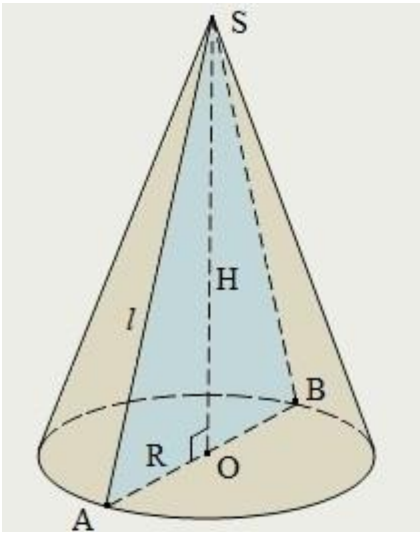
Кривая ABCDA – направляющая;

прямая SA – образующая;

точка S – вершина;

отрезок SO – высота;

фигура F – основание конуса.



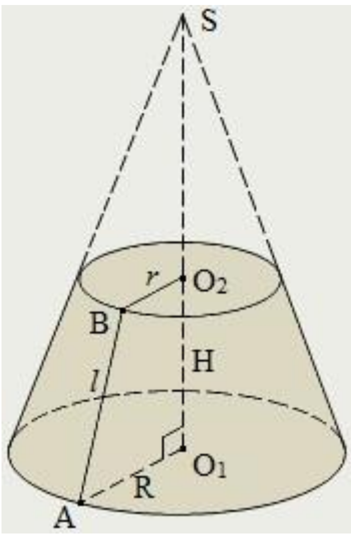
Конус называется *прямым круговым*, если его направляющая – окружность, а вершина ортогонально проектируется в его центр.

В элементарной геометрии прямой круговой конус часто называют просто конусом.

Прямой круговой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. При этом вращении другой катет опишет основание конуса, а гипотенуза – боковую поверхность.

Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является *осевое сечение конуса*. Это сечение, которое проходит через ось конуса.



Часть конуса, ограниченная его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённым конусом*.

Отрезок АВ – образующая усечённого конуса;

отрезок O_1O_2 – высота усечённого конуса;

отрезки AO_1 и BO_2– радиусы оснований.

Практическая работа №49

Тема: Изучение шара. Сечение шара плоскостью. Сфера.
Цели:
- изучить материал по теме,
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, формулы.

Ход работы:
Задание: Изучите теоретический материал, ответьте на контрольные вопросы, выполните необходимые чертежи.
1. Понятие сферы, шара (чертёж).
2. Покажите на чертеже основные элементы сферы.
3. Какая плоскость называется касательной к сфере (чертеж)?
4. Что такое шаровой сектор, основание шарового сектора?
5. Как вычисляется объем шара?

Теоретический материал

Понятие сферы и шара

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

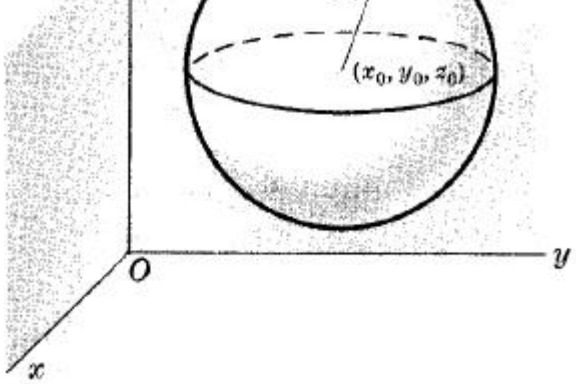
Тело, ограниченное сферой, называется шаром.

Данная точка называется центром сферы, а данное расстояние – радиусом сферы.

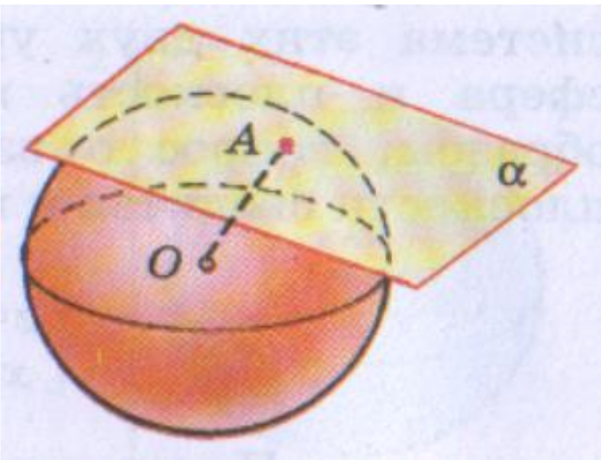
Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий

через ее центр, называется диаметром сферы.

Центр, радиус, диаметр сферы называется также центром, радиусом и диаметром шара.



Касательная плоскость к сфере

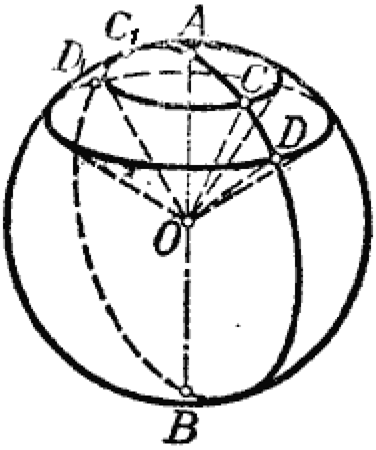


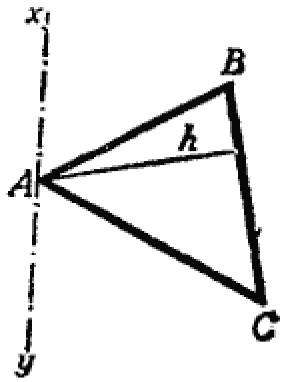
Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.

Теорема. Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Объём шара и его частей

Определение. Тело, получаемое от вращения кругового сектора (COD) вокруг диаметра (AB), не пересекающего ограничивающую его дугу, называется **шаровым сектором**. Это тело ограничено боковыми поверхностями двух конусов и поверхностью шарового пояса; последняя называется **основанием шарового сектора**. Один из радиусов кругового сектора может совпадать с осью вращения; например, сектор AOC, вращаясь вокруг AO, производит шаровой сектор $OCAC_1$, ограниченный боковой поверхностью конуса и сегментной поверхностью.





Объём шара равняется произведению его поверхности на треть радиуса.

объём шарового сектора = $2\pi RH\bullet {}^{1}/_{3}\, R = {}^{2}/_{3}\pi R^2H$;

объём шара = $4\pi R^2\bullet {}^{1}/_{3}\, R = {}^{4}/_{3}\pi R^3$ [1)]

или

объём шара = ${}^{4}/_{3}\pi\, ({}^{D}/_{2})^3 = {}^{1}/_{6}\pi D^3$.

Практическая работа № 50

Тема: Решение задач по теме: «Цилиндр и конус».

Цели:
- закрепить изученный материал при решении задач по теме: «Цилиндр и конус»;
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

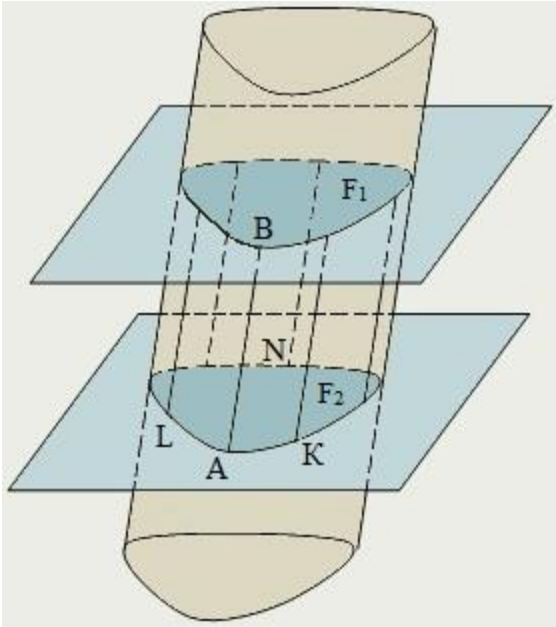
1. **Запишите ответы на следующие контрольные вопросы:**
    1. Запишите определения цилиндра и конуса.
    2. Какой цилиндр называется прямым круговым?
    3. Запишите определение высоты цилиндра.
    4. Что называют радиусом цилиндра?
    5. Какой конус называется прямым круговым?
    6. Запишите определение высоты конуса.

2. **Решите задачи:**

    1) Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Найти площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4см от нее.
    2) Высота цилиндра 8дм, радиус основания 5дм. Цилиндр этот пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найти расстояние этого сечения от оси.
    3) Высота цилиндра 6см, радиус основания 5см. Концы данного отрезка лежат на окружности обоих оснований, длина его 10см. Найти его кратчайшее расстояние от оси.
    4) Высота конуса 20см, радиус его основания 25см. Найти площадь сечения, проведенного через вершину, если его расстояние от центра основания конуса равно 12см.
    5) Радиус основания конуса 16дм. Осевым сечением служит прямоугольный треугольник. Найти его площадь.

Справочный материал

Цилиндр



Цилиндрическая поверхность – поверхность, образуемая движением прямой (в каждом своём положении называемой образующей) вдоль кривой (называемой направляющей) так, что прямая постоянно остаётся параллельной своему начальному положению.

Прямая AB – образующая;

кривая AKNLA – направляющая.

Бесконечный цилиндр – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью.

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её.

Часть поверхности цилиндра, ограниченная цилиндрической поверхностью, называется *боковой поверхностью цилиндра*.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.

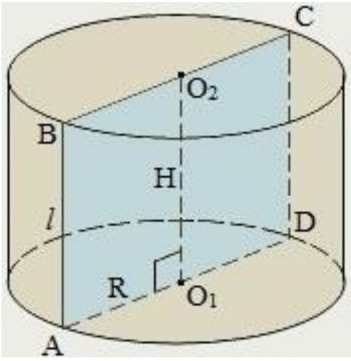
Другая часть, ограниченная параллельными плоскостями – это *основания цилиндра*.

Отрезок AB – образующая;

фигуры F_1 и F_2 – основания.

У цилиндра:

- основания равны;
- образующие параллельны и равны



Цилиндр, у которого основания перпендикулярны образующим и являются кругами, называется *прямым круговым цилиндром* (часто, и далее, – просто *цилиндром*).

Прямой круговой цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры его оснований. Ось цилиндра параллельна образующим.

Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось. Осевым сечением цилиндра (прямого кругового цилиндра) является прямоугольник.

AO_1 – радиус цилиндра;

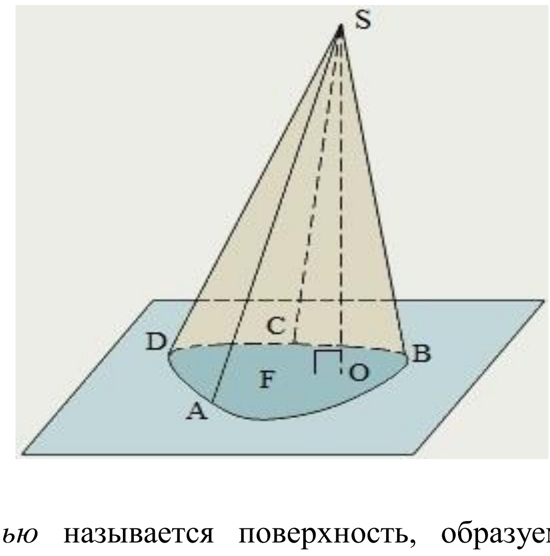
AB, CD – образующие цилиндра;

O_1O_2 – ось цилиндра;

AB, CD, O_1O_2 – высоты цилиндра;

ABCD – осевое сечение цилиндра.

Конус



Конической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой, проходящей всё время через неподвижную точку вдоль данной линии.

Эта линия называется *направляющей*, двигающаяся прямая, в каждом своём положении, – *образующей*, а неподвижная точка – *вершиной*.

Конусом называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью, пересекающей все образующие этой полости и не проходящей через вершину.

Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется *основанием конуса*.

Высота конуса – это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания.

Часть конической поверхности, расположенная между вершиной и плоскостью основания, называется *боковой поверхностью конуса*.

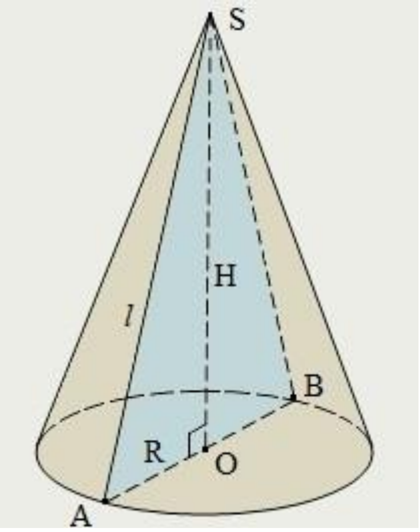
Кривая ABCDA – направляющая;

прямая SA – образующая;

точка S – вершина;

отрезок SO – высота;

фигура F – основание конуса.



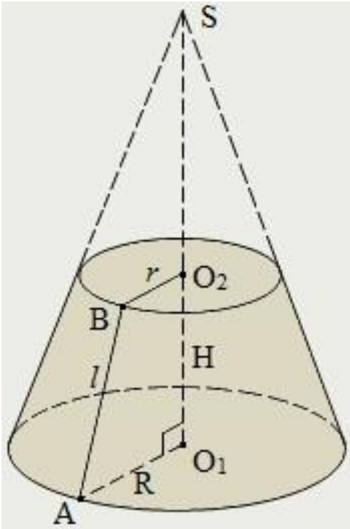
Конус называется *прямым круговым*, если его направляющая – окружность, а вершина ортогонально проектируется в его центр.

В элементарной геометрии прямой круговой конус часто называют просто конусом.

Прямой круговой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. При этом вращении другой катет опишет основание конуса, а гипотенуза – боковую поверхность.

Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является *осевое сечение конуса*. Это сечение, которое проходит через ось конуса.



Часть конуса, ограниченная его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённым конусом*.

Отрезок AB – образующая усечённого конуса;

отрезок O_1O_2 – высота усечённого конуса;

отрезки AO_1 и BO_2– радиусы оснований.

Практическая работа №51

Тема: Решение задач на нахождение поверхности призмы и пирамиды.

Цели:
- закрепить изученный материал при решении задач по теме: «Боковая поверхность призмы и пирамиды»;
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:

3. **Запишите ответы на следующие контрольные вопросы:**

1. Какая призма называется прямой, что такое высота призмы?
2. Как вычисляется боковая поверхность призмы?
3. Как вычисляется боковая поверхность прямой призмы?
4. Какая пирамида называется правильной, что такое высота пирамиды?
5. Как вычисляется боковая поверхность правильной пирамиды?

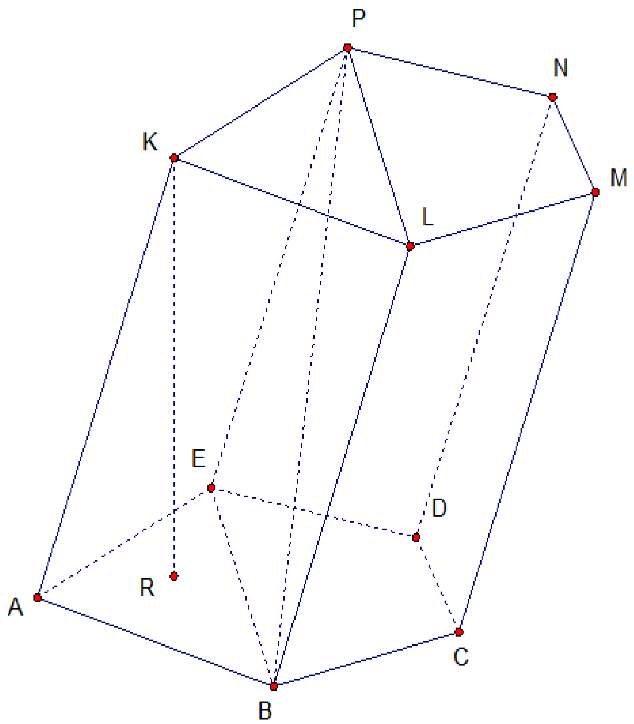
4. **Решите задачи:**

1. Высота прямой призмы, основание которой есть правильный треугольник, равна 12см, сторона основания 3см. Вычислить полную поверхность призмы.
2. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 1714м^2, а неравные стороны основания равны 25м и 14м. Вычислить боковую поверхность и боковое ребро.

3. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая поверхность равна 14,76м^2, а полная поверхность 18м^2. Определить сторону основания и высоту пирамиды.
4. Определить боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если её высота равна 4см, а апофема 8см.

Справочный материал

П р и з м о й **называется многогранник, у которого две грани - равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани – параллелограммы.**



Многоугольники ABCDE и A_1 B_1 C_1 D_1 E_1, лежащие в параллельных плоскостях, называются ***основаниями призмы, перпендикуляр KR, опущенный из какой-нибудь точки оного основания на плоскость другого называется высотой призмы. Параллелограммы ABLK, BCML, CDNM, DEPN, EAKP называются боковыми гранями призмы, а их стороны AK, BL, CM, DN, EP, соединяющие соответствующие вершины оснований, называются боковыми рёбрами. У призмы все боковые рёбра равны, как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями. Отрезок прямой, соединявший какое-нибудь две вершины, не прилежащие к одной грани, называется диагональю призмы. Таков, например, отрезок PB.***

Плоскость, проведённая через какие-нибудь два боковых ребра, не прилежащие к одной боковой грани призмы (например, через рёбра AK и CM) называется диагональной плоскостью (на рисунке не показанной).

Призма называется прямой или наклонной, смотря по тому, будут ли её боковые рёбра перпендикулярны или наклонны к основаниям. У прямой призмы боковые грани - прямоугольники. За высоту такой призмы можно принять боковое ребро.

Прямая призма называется правильной, если её основания - правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани - равные ***прямоугольники. Призмы бывают треугольные, четырёхугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием: треугольник, четырёхугольник и т. д.***

Боковая поверхность призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на боковое ребро.

$S_{бок}= P_{перп.сеч.} \cdot n$

n- боковое ребро

H- высота

P- периметр

S- площадь

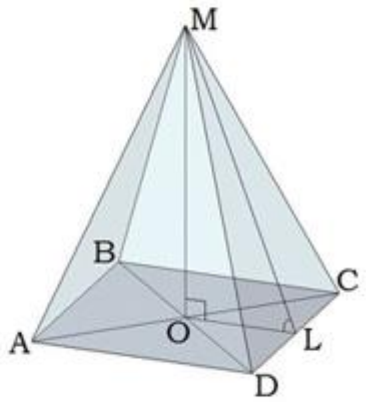
Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту.

$S_{бок}= P_{осн} \cdot H$

Полная поверхность призмы равна $S_{полн}= 2S_{осн}+ S_{бок}$

Полная поверхность прямой призмы равна $S_{полн}= 2S_{осн}+ P_{осн} \cdot H$

Пирамидой называется многогранник, у которого одна грань, называемая *основанием* (ABCD), есть какой-нибудь многоугольник, а все остальные грани, называемые *боковыми* (ABM, BMC, DMC, AMD) - треугольники, имеющие общую вершину.

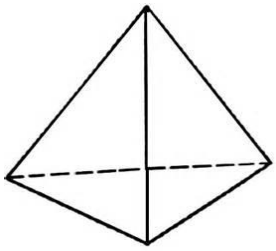


Общая вершина *M* боковых треугольников называется *вершиной* пирамиды, а перпендикуляр *MO*, опущенный из вершины на плоскость основания называется её *высотой.*

Обыкновенно, обозначая пирамиду буквами, пишут сначала ту, которой обозначена вершина (MABCD). Плоскость, проведённая через вершину пирамиды и через какую-нибудь диагональ основания, например, через диагональ *BD,* называется диагональной плоскостью (BMD).

Пирамиды бывают треугольные, четырёхугольные и т. д., смотря по тому, что является основанием – треугольник, четырёхугольник и т. д.

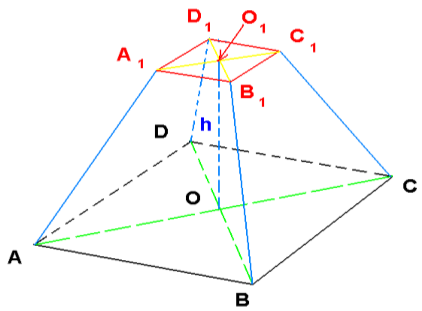
Треугольная называется иначе *тетраэдром*; все четыре грани у такой пирамиды – треугольники.



Пирамида называется *правильной*, если, во-первых, её основание есть правильный многоугольник и, во-вторых, высота проходит через центр этого многоугольника. В правильной пирамиде все боковые рёбра равны между собой (как наклонные с равными проекциями). Поэтому все боковые грани правильной пирамиды являются равнобедренными треугольниками. Высота ML каждого из этих треугольников называется *апофемой.* Все апофемы в правильной пирамиде равны.

Усечённая пирамида

Часть пирамиды, заключённая между основанием (*ABCD*) и секущей плоскостью ($A_1B_1C_1D_1$), параллельной основанию, называется *усечённой пирамидой***.** Параллельные грани называются *основаниями***,** а отрезок перпендикуляра OO_1, опущенного из какой-нибудь точки O_1 основания $A_1B_1C_1D_1$ на другое основание, - *высотой* усечённой пирамиды. Усечённая пирамида называется *правильной***,** если она составляет часть правильной пирамиды.



Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.

$\boldsymbol{S_{бок}= P_{осн}\cdot\frac{1}{2}\, m}$, *m-апофема*

Полная поверхность пирамиды равна $\boldsymbol{S_{полн}= S_{осн}+ S_{бок}= S_{осн}+\frac{1}{2}\, m}$

Практическая работа №52

Тема: Решение задач на нахождение объема призмы и пирамиды.

Цели:

- закрепить изученный материал при решении задач по теме: «Объем призмы и пирамиды»;
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал

Ход работы:

Задание: Запишите формулы для вычисления объема призмы и пирамиды и решите задачи.

1. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4 см, 5 см и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объём призмы.

Ответ: 48 $м^3$.

2.Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 $см^2$, а площади боковых граней 9 $см^2$, 10 $см^2$ и 17 $см^2$. Найдите объём.

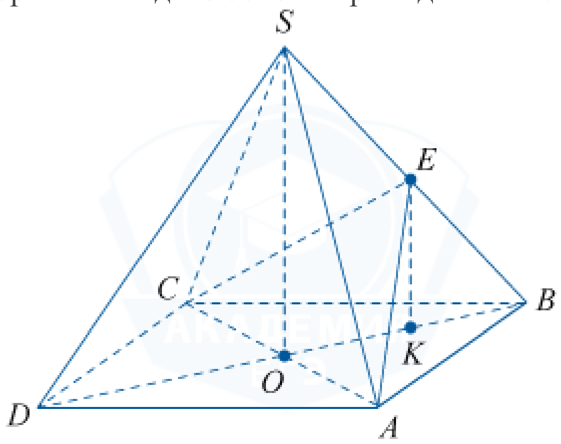
Ответ: 12 $см^3$.

3. Основанием наклонной призмы является равносторонний треугольник со стороной *a*; одна из боковых граней перпендикулярна основанию и является ромбом, у которого меньшая диагональ равна *c*. Найдите объём призмы.

Ответ: $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2 - 3c^2}$.

4.В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с основанием ABCD боковое ребро SA равно 5, сторона основания равна $4\sqrt{2}$. Найдите объём пирамиды.

Объём правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* равен 16. Точка *E* — середина ребра *SB*. Найдите объём пирамиды *EABC*.



5.Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60∘. Высота пирамиды равна 9. Найдите объём пирамиды.

Практическая работа № 53

Тема: Решение задач на нахождение поверхности цилиндра и конуса.

Цели:

- вспомнить теоремы о вычислении боковой поверхности конуса и цилиндра;

- закрепить изученный материал при решении задач по теме: «Боковая поверхность конуса и цилиндра»;
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у обучающихся.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

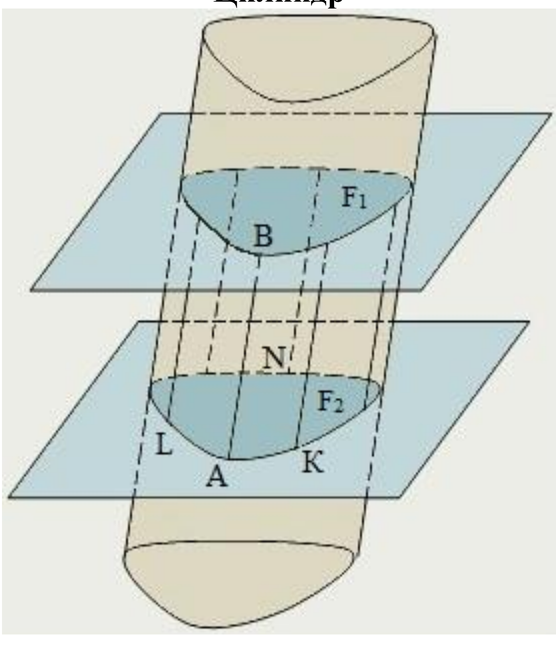
1. Запишите ответы на контрольные вопросы.
2. Что называют боковой поверхностью цилиндра и конуса?
3. Что называют высотой цилиндра и конуса?
4. Запишите формулы для вычисления боковой и полной поверхности цилиндра.
5. Запишите формулы для вычисления боковой и полной поверхности конуса.
6. Какой конус называют усеченным?
7. Как вычисляется боковая поверхность усечённого конуса?

2. Решите задачи:

1. Высота цилиндра на 10см больше радиуса основания, а полная поверхность равна 144π см^2.Определть радиус основания и высоту.
2. Высота равностороннего цилиндра равна h. Найти боковую поверхность.
3. Радиус основания цилиндра равен R, боковая поверхность равна сумме площадей оснований. Найти высоту.
4. Площадь осевого сечения цилиндра равна Q. Найти боковую поверхность.
5. Высота конуса равна 6м, радиус основания 8м. Найти боковую поверхность.
6. Конусообразная палатка высотой в 3,5м с диаметром основания в 4м покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?

Справочный материал

Цилиндр



Цилиндрическая поверхность – поверхность, образуемая движением прямой (в каждом своём положении называемой образующей) вдоль кривой (называемой направляющей) так, что прямая постоянно остаётся параллельной своему начальному положению.

Прямая AB – образующая;

кривая AKNLA – направляющая.

Бесконечный цилиндр – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью.

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, пересекающими её.

Часть поверхности цилиндра, ограниченная цилиндрической поверхностью, называется *боковой поверхностью цилиндра*.

Высотой цилиндра называется расстояние между плоскостями его оснований.

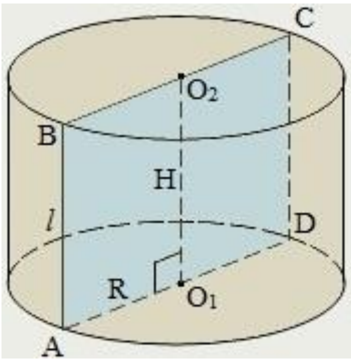
Другая часть, ограниченная параллельными плоскостями – это *основания цилиндра*.

Отрезок AB – образующая;

фигуры F_1 и F_2 – основания.

У цилиндра:

- основания равны;
- образующие параллельны и равны



Цилиндр, у которого основания перпендикулярны образующим и являются кругами, называется *прямым круговым цилиндром* (часто, и далее, – просто *цилиндром*).

Прямой круговой цилиндр можно получить вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон.

Радиусом цилиндра называется радиус его основания.

Осью цилиндра называется прямая, проходящая через центры его оснований. Ось цилиндра параллельна образующим.

Осевым сечением цилиндра называется сечение цилиндра плоскостью, проходящей через его ось. Осевым сечением цилиндра (прямого кругового цилиндра) является прямоугольник.

AO_1 – радиус цилиндра;

AB, CD – образующие цилиндра;

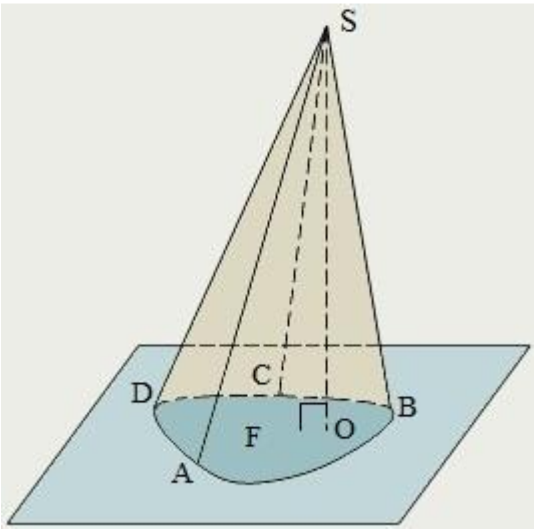
O_1O_2 – ось цилиндра;

AB, CD, O_1O_2 – высоты цилиндра;

ABCD – осевое сечение цилиндра.

Боковая поверхность цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту.
$S_{бок}=C\cdot H=2\pi R\cdot H$
C-длина окружности
R- радиус
H- высота
Полная поверхность цилиндра равна $S_{полн}=2S_{осн}+S_{бок}=2\pi R^2+2\pi RH=$
$=2\pi R(R+H)$

Конус



Конической поверхностью называется поверхность, образуемая движением прямой, проходящей всё время через неподвижную точку вдоль данной линии.

Эта линия называется *направляющей*, двигающаяся прямая, в каждом своём положении, – *образующей*, а неподвижная точка – *вершиной*.

Конусом называется тело, ограниченное одной полостью конической поверхности с замкнутой направляющей и плоскостью, пересекающей все образующие этой полости и не проходящей через вершину.

Часть этой плоскости, лежащая внутри конической поверхности, называется *основанием конуса*.

Высота конуса – это перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания.

Часть конической поверхности, расположенная между вершиной и плоскостью основания, называется *боковой поверхностью конуса*.

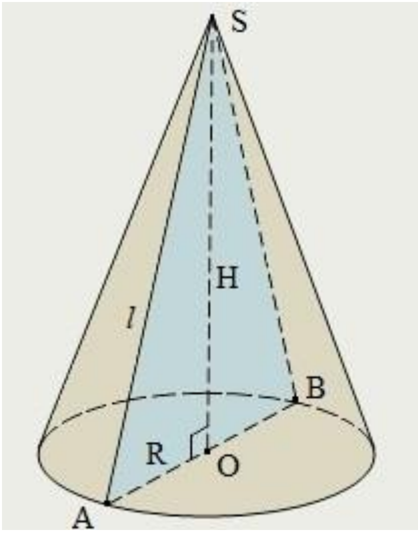
Кривая ABCDA – направляющая;

прямая SA – образующая;

точка S – вершина;

отрезок SO – высота;

фигура F – основание конуса.



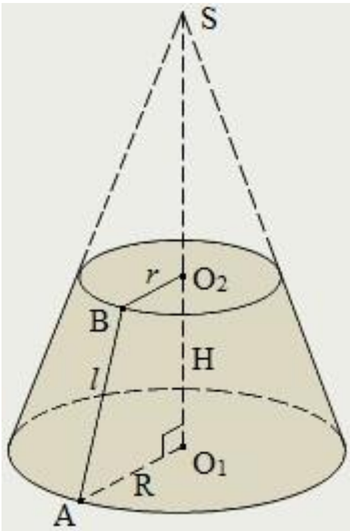
Конус называется *прямым круговым*, если его направляющая – окружность, а вершина ортогонально проектируется в его центр.

В элементарной геометрии прямой круговой конус часто называют просто конусом.

Прямой круговой конус можно получить вращением прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов. При этом вращении другой катет опишет основание конуса, а гипотенуза – боковую поверхность.

Осью прямого кругового конуса называется прямая, содержащая его высоту.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину, представляет собой равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны являются образующими конуса. В частности, равнобедренным треугольником является *осевое сечение конуса*. Это сечение, которое проходит через ось конуса.



Часть конуса, ограниченная его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию, называется *усечённым конусом*.

Отрезок AB – образующая усечённого конуса;

отрезок O_1O_2 – высота усечённого конуса;

отрезки AO_1 и BO_2– радиусы оснований.

Боковая поверхность конуса равна произведению длины окружности основания на половину образующей.
C-длина окружности
R,r- радиусы
L- образующая

$$S_{бок}=C\cdot\frac{1}{2}L=\frac{1}{2}\cdot 2\pi RL=\pi RL$$

Полная поверхность конуса равна $S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}=\pi R^2+\pi RL=\pi R(R+L)$

Боковая поверхность усеченного конуса равна $S_{бок} = \pi(R + r)L$;

Полная поверхность усеченного конуса равна $S_п = \pi(R^2 + r^2 + RL + rL)$;

Практическая работа № 54

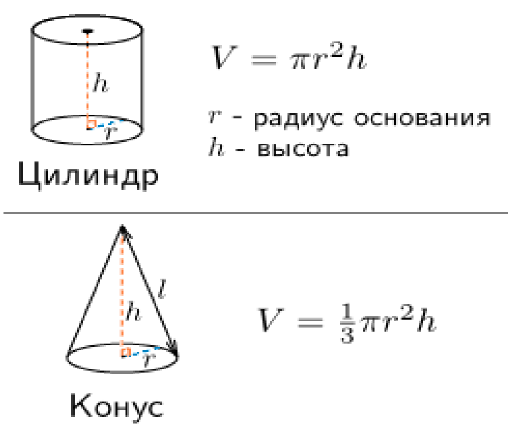
Тема: Объем цилиндра и конуса. Решение задач на нахождение объема цилиндра и конуса.

Цели:
- вспомнить теоремы о вычислении объема конуса и цилиндра;
- закрепить изученный материал при решении задач по теме: «Объем конуса и цилиндра»;
- способствовать развитию логического мышления и пространственного представления у обучающихся.

Норма времени: 2 часа
Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Задание: Запишите формулы для вычисления объема цилиндра и конуса и решите задачи.



Вариант 1

1. Радиус основания цилиндра относится к его высоте как 1:2. Найдите объём цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна $10\sqrt{2}$.

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $4\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°.

3. Площадь осевого сечения конуса равна 30, а площадь его основания равна 25 π . Найдите объём конуса.

4. В куб вписан шар. Найдите объём шара, если объём куба равен 24.

Вариант 2

1. Радиус основания цилиндра относится к его высоте как 1:2. Найдите объём цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна $14\sqrt{2}$.

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $6\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°.

3. Площадь осевого сечения конуса равна 24, а площадь его основания равна 36 π . Найдите объём конуса.

4. В куб вписан шар. Найдите объём шара, если объём куба равен 30.

Вариант 3

1. Радиус основания цилиндра относится к его высоте как 1:2. Найдите объём цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна $8\sqrt{2}$.

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $10\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°.

3. Площадь осевого сечения конуса равна 42, а площадь его основания равна 49 π . Найдите объём конуса.

4. В куб вписан шар. Найдите объём шара, если объём куба равен 36.

Вариант 4

1. Радиус основания цилиндра относится к его высоте как 1:2. Найдите объём цилиндра, если диагональ его осевого сечения равна $12\sqrt{2}$.

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $8\sqrt{3}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая грань составляет с плоскостью основания угол 60°.

3. Площадь осевого сечения конуса равна 36, а площадь его основания равна 16π . Найдите объём конуса.

4. В куб вписан шар. Найдите объём шара, если объём куба равен 42.

ОТВЕТЫ

№ варианта	***1 задание***	***2 задание***	***3 задание***	***4 задание***
1	250π	*96*	50π	4π
2	686π	*324*	48π	5π
3	128π	*1500*	98π	6π
4	432π	*768*	48π	7π

Практическая работа №55

Тема: **Решение задач на подсчет числа размещений, перестановок и сочетаний.**

Цели:

- вырабатывать навыки решения задач на подсчет числа размещений, перестановок и сочетаний:

- способствовать развитию логического мышления студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта

Ход работы

1.Изучите краткие теоретические сведения и образцы решения примеров

Комбинаторными задачами называются задачи, в которых необходимо подсчитать, сколькими способами можно сделать тот или иной выбор, выполнить какое-либо условие.

Пусть имеется множество, содержащее n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется *размещением из n элементов по k элементов:*

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$, где n!=1*2*3*…*n

Пример. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?

Решение. Число способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. равно A_7^4. Получаем $A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = \frac{3!*4*5*6*7}{3!} = 4*5*6*7 = 840$.

Размещения из n элементов по n элементов называются *перестановками из n элементов:*

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!.$$

Пример. Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Цифра 5 обязана стоять на последнем месте. Остальные пять цифр могут стоять на оставшихся пяти местах в любом порядке. Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных пяти, равно числу перестановок из пяти элементов, т.е. 5!=5*4*3*2*1=120.

Сочетания. Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k элементов:*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Пример. Сколько матчей будет сыграно в футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Матчей состоится столько, сколько существует двухэлементных подмножеств у множества, состоящего из 16 элементов, т.е. их число равно

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{14!*15*16}{2!*14!} = \frac{15*16}{2} = 120.$$

Свойства сочетаний:

7) $C_n^k = C_n^{n-k}$ $\qquad$ $C_{n+k}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$

2. Решите следующие задачи на размещения.
1) Сколькими способами можно выбрать председателя, заместителя и секретаря собрания из присутствующих 30 человек?
2) Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1,2,4,5,8 при условии, что три цифры в каждом числе различны?
3) Во время загородной прогулки на привале Петя нашел три камня весом 1 кг,1,5 кг и 3 кг и решил незаметно подложить по одному камню в рюкзаки к своим друзьям. Сколькими способами может «пошутить» Петя, если друзей с рюкзаками шесть?
3. Решите следующие задачи на перестановки.
1) Сколькими способами 4 мужчины могут расположиться на четырехместной скамейке?
2) Курьер должен разнести пакеты в 7 разных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?
3) Сколько существует выражений, тождественно равных произведению *abcde*, которые получаются из него перестановкой множителей?
4) Ольга помнит, что телефон подруги оканчивается тремя цифрами 5, 7, 8, но забыла, в каком порядке эти цифры расположены. Укажите наибольшее число вариантов, которые ей придется перебрать, чтобы дозвониться подруге.
5) Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр:
1) 1, 2, 5, 6, 7, 8; 2) 0, 2, 5, 6, 7, 8?

6) В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, иностранный язык, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так, чтобы два урока математики стояли подряд?

4. Решите следующие задачи на сочетания.
1) В классе 7 учащихся успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
2) В магазине «Филателия» продается 8 разных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?
3) Ученикам дали список из 10 книг, которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?
4) На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных произведений на английском языке. Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги, если:
1) словарь ему нужен обязательно; 2) словарь ему не нужен?
5) В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории необходимо выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?

Практическая работа №56

Тема: **Вычисление вероятности событий. Решение задач на сложение и умножение вероятностей.**

Цели:
- вырабатывать навыки решения задач на сложение и умножение вероятностей
- способствовать развитию логического мышления студентов.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта

Ход работы

1.Изучите краткие теоретические сведения и образцы решения примеров.

Классическое определение вероятности: вероятность Р(А) события А равна отношению числа возможных результатов опыта (М), благоприятствующих событию А, к числу всех возможных результатов опыта (N):

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

Пример 1. Подбрасывание игральной кости один раз. Событие А состоит в том, что выпавшее число очков – чётно. В этом случае N=6 – число граней куба; M=3 – число граней с чётными номерами; тогда P(A)=3/6=1/2.

Пример 2. Подбрасывание симметричной монеты 2 раза. Событие А состоит в том, что выпало ровно 2 герба. В этом случае N=4, т.к. Ω={ГГ, ГР, РГ, РР}; М=1, т.к. А={ГГ}. Тогда Р(А)= ¼.

Пример 3. Вытягивание шара из урны, содержащей 2 белых и 3 чёрных шара. Событие А состоит в том, что вытянули чёрный шар. В этом случае N=2+3=5 (общее число шаров в урне), M=3 (число чёрных шаров), тогда P(A)=3/5.

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры. Какова вероятность того, что он с первого раза наберёт эти цифры правильно, если он помнит, что они различны?

Решение. Обозначим А – событие, состоящее в том, что абонент, набрав произвольно две цифры, угадал их правильно. М – число правильных вариантов, очевидно, что М=1; N – число различных цифр, $N = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = \frac{8!*9*10}{8!} = 9*10 = 90$.

Таким образом, Р(А)=M/N=1/90.

Пример 5. Шесть шариков случайным образом располагаются в шести ящиках так, что для каждого шарика равновероятно попадание в любой ящик и в одном ящике может находиться несколько шариков. Какова вероятность того, что в каждом ящике окажется по одному шарику?

Решение. Событие А – в каждом ящике по одному шарику. М – число вариантов распределения шариков, при которых в каждый ящик попадает по одному шарику, М=6! (число способов переставить между собой 6 элементов). N – общее число вариантов N=6^6 (так как каждый шарик может попасть в каждый из ящиков). В результате получаем

$$P(A) = \frac{6!}{6^6} = \frac{5!*6}{6^6} = \frac{5!}{6^5}.$$

Пример 6. В урне 3 белых и 4 чёрных шара. Из урны вынимаются два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Обозначим: А – событие, состоящее в появлении белых шаров; N – число способов вытащить 2 шара из 7; $N = C_7^2$; М – число способов вытащить 2 белых шара из имеющихся 3 белых шаров; $M = C_3^2$.

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{2!*5!*3!}{7!*2!*1!} = \frac{3!}{7*6} = \frac{1}{7}$$

Вероятность противоположного события $\overline{A}$ определяется по формуле: p($\overline{A}$)=1-p(A).

Для несовместных событий вероятность суммы двух событий вычисляется по формуле:

p(A+B)=p(A)+p(B).

Пример. Завод производит 85% продукции первого сорта и 10% - второго. Остальные изделия считаются браком. Какова вероятность, что взяв наудачу изделие, мы получим брак?

Решение. P=1-(0,85+0,1)=0,05.

Вероятность суммы двух любых случайных событий равна p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB).

Пример. Из 20 студентов 5 человек сдали на двойку экзамен по истории, 4 – по английскому языку, причём 3 студента получили двойки по обоим предметам. Каков процент студентов в группе, не имеющих двоек по этим предметам?

Решение. P = 1 - (5/20 + 4/20 - 3/20) = 0,7 (70%)

Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется

$$p(B/A)=\frac{p(AB)}{p(A)}$$

Пример. В урне лежит N шаров, из них n белых. Из неё достают шар и, не кладя его обратно, достают ещё один. Чему равна вероятность того, что оба шара белые?

Решение. Обозначим A – событие, состоящее в том, что первым вынули белый шар, через B событие, состоящее в том, что первым вынули чёрный шар, а через C событие, состоящее в том, что вторым вынули белый шар; тогда

$$p(A)=\frac{n}{N};\quad p(B)=\frac{N-n}{N};\quad p(CA)=\frac{n-1}{N-1};\quad p(C\,|\,B)=\frac{n}{N-1};$$

$$p(AC)=p(A)*p(C\,|\,A)=\frac{n*(n-1)}{N*(N-1)}$$

Пример. Из 30 экзаменационных билетов студент подготовил только 25. Если он отказывается отвечать по первому взятому билету (которого он не знает), то ему разрешается взять второй. Определить вероятность того, что второй билет окажется счастливым.

Решение. Пусть событие A заключается в том, что первый вытащенный билет оказался для студента «плохим», а B – второй – «хорошим». Поскольку после наступления события A один из «плохих» уже извлечён, то остаётся всего 29 билетов, из которых 25 студент знает. Отсюда искомая вероятность равна P(B/A)=25/29.

Вероятность произведения: p(AB)=p(A)*p(B|A)=p(B)*p(A|B).

Пример. По условиям предыдущего примера найти вероятность успешной сдачи экзамена, если для этого студент должен ответить на первый билет, или, не ответив на первый, обязательно ответить на второй.

Решение. Пусть события A и B заключаются в том, что соответственно первый и второй билеты «хорошие». Тогда $\overline{A}$ - появление «плохого» билета в первый раз. Экзамен будет сдан, если произойдёт событие A, или одновременно $\overline{A}$ и B. То есть искомое событие C – успешная сдача экзамена выражается следующим образом: $C=A+\bar{A}B$. Отсюда

$$p(C)=p(A+\bar{A}B)=p(A)+p(\bar{A}B)=p(A)+p(\bar{A})p(B/\bar{A})=25/30+5/30*25/29=0{,}977$$

или

$$p(C)=1 - p(\bar{C})=1 - p(\bar{A}*\bar{B})=1 - p(\bar{A})* p(\bar{A}/\bar{B})=1 -5/30*4/29=0{,}977$$

Случайные события A и B назовём *независимыми*, если $p(AB)=p(A)*p(B)$.

Пример. Рассмотрим предыдущий пример с урной, содержащей N шаров, из которых n белых, но изменим опыт: вынув шар, мы кладём его обратно и только затем вынимаем следующий. A – событие, состоящее в том, что первым вынули белый шар, B – событие, состоящее в том, что первым вынули чёрный шар, а C – событие, состоящее в том, что вторым вынули белый шар; тогда

$$p(A)=\frac{n}{N};\quad p(B)=\frac{N-n}{N};\quad p(C/A)=\frac{n}{N};\quad p(C|B)=\frac{n}{N};$$

$$p(AC)=p(A)*p(C|A)=\frac{n*n}{N*N}=p(A)*p(C);$$

т.е. в этом случае события A и C независимы.

2. Решите следующие задачи.

1. На столе 12 кусков пирога. В трех «счастливых» из них запечены призы. Какова вероятность взять «счастливый» кусок пирога?
2. В урне 15 белых и 25 черных шаров. Из урны наугад выбирается один шар. Какова вероятность того, что он будет белым?
3. В лотерее 100 билетов, из них 5 выигрышных. Какова вероятность выигрыша?
4. В корзине лежат 5 яблок и 3 груши. Из корзины наугад вынимается один фрукт. Какова вероятность того, что это яблоко?
5. В вазе 7 цветков, из них 3 розы. Из букета наугад вынимается цветок. Какова вероятность того, что это роза?
6. В корзине 10 яблок, из них 4 червивых. Какова вероятность того, что любое взятое наугад яблоко окажется не червивым?
7. Вероятность того, что на тесте по биологии учащийся О. верно решит больше 11 задач, равна 0,67. Вероятность того, что О. верно решит больше 10 задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что О. верно решит ровно 11 задач.
8. Биатлонист пять раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые три раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.
9. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,06. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Практическая работа № 57

Тема: Повторение по теме «Производная».

Цели:
- вспомнить основные правила дифференцирования функций,
- вырабатывать навыки нахождения производных.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Вариант №1.

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=2x^3+7x^2$

б) $f(x)=3\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x$

в) $f(x)=(3x^4+1)(2x^3-3)$

г) $f(x)=\dfrac{2\sin 3x-3\cos x}{\sin 2x}$

д) $f(x)=\sqrt{3x^2-1}$

2. Решите неравенство $f'(x)>0$, если $f(x)=2x^3+6x^2$
3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2+2x-1$ в точке $x_0=1$.
4. Тело движется по закону $x(t)=2t^2-8t+7$. Определите момент времени, когда скорость тела равна нулю.

5. Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^3–3x^2$ и найти ее промежутки монотонности.

Вариант №2.

1. Найдите производную функции:

а) $f(x)=5x^3-4x^2$

б) $f(x)=2\sin x+\cos x-\operatorname{ctg} x$

в) $f(x)=(2x^3+1)(4x^4-2)$

г) $f(x)=\dfrac{2\cos 3x-3\sin x}{\cos 2x}$

д) $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$

2. Решите неравенство $f'(x)<0$, если $f(x)=4x^{3-}6x^2$
3. Напишите уравнение касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x^2-3x+1$ в точке $x_0=2$.

4. Тело движется по закону $x(t)=3t^2-12t+8$. Определите момент времени, когда скорость тела равна нулю.

5.Исследовать на экстремум функцию $f(x) = 2x^3–x^2$ и найти ее промежутки монотонности.

Практическая работа № 58

Тема: Повторение по теме «Решение уравнений».

Цели:

- вспомнить основные правила решения показательных, логарифмических и иррациональных уравнений,
- вырабатывать навыки решения уравнений.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта, справочный материал.

Ход работы:

Задание: Решите уравнения

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ

1) $2^{3x-4}=16$;

2) $3^{4x+5}=81$;

3) $4^{5x-8}=64$;

4) $6^{3x+5}=36$;

5) $2^{-8-10x}=32$

6) $5^{2x-2,3}=125$

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ

1) $\log_{\frac{1}{4}}(2x-1)=-1$;

2) $\log_{16}(4x+3)=\frac{1}{2}$;

3) $\log_{4}(2x-1)=\frac{1}{2}$;

4) $\log_{\frac{1}{3}}(4x+5)=-1$;

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ

1) $\sqrt{2x+3}=3$;

2) $\sqrt[3]{4x+1}=-4$;

3) $\sqrt{4x+1}=4$;

4) $\sqrt[3]{2x-1}=-2$;

5) $\sqrt{2x+3}=x$;

6) $\sqrt{2x-1}=2$;

Практическая работа № 59

Тема: Решение задач по геометрии.

Цели:

- применение знаний, полученных при изучении стереометрии при решении задач.

Норма времени: 2 часа

Оборудование: инструкционная карта

Ход работы:

Задание: Решите задачи.

1. Через точки A и B проведены прямые, перпендикулярные плоскости α, пересекающие ее в точках C и D соответственно. Найти расстояние между точками A и B, если $AC = 3\,см$, $BD = 2\,см$, $CD = 2{,}4\,см$ и отрезок AB не пересекает плоскость α.
2. Основание прямой призмы – прямоугольный треугольник с катетами $6\,см$ и $8\,см$. Диагональ боковой грани, содержащей гипотенузу треугольника, равна $26\,см$. Найдите: высоту призмы; боковую поверхность призмы; полную поверхность призмы.
3. В правильной четырехугольной пирамиде апофема равна $4\,см$, а боковое ребро – $5\,см$. Найдите: сторону основания пирамиды; высоту пирамиды; полную поверхность пирамиды.
4. Осевое сечение цилиндра – квадрат с площадью $36\,см^2$. Найдите полную поверхность цилиндра.
5. Образующая конуса равна $8\,см$ и наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите полную поверхность конуса.
6. Высота цилиндра равна $5\,см$, а диагональ осевого сечения – $13\,см$. Найдите объем цилиндра
7. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник с гипотенузой $8\,см$. Найдите объем конуса.

Основная литература для студентов

1. Математика: учебное пособие / Карбачинская Н.Б., Лебедева Е.С., Харитонова Е.Е., Чернецов М.М. [и др.]. — Электрон. текстовые данные. — М. : Российский государственный университет правосудия, 2015. — 342 c. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/49604.

Дополнительная литература

Алимов Ш. А. и др. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа (базовый и углубленный уровни).10—11 классы. — М., 2014.

Башмаков М. И. Математика. Сборник задач профильной направленности: учеб. Пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.

Башмаков М. И. Математика. Задачник: учеб. пособие для студ. учреждений сред. проф. образования. — М., 2014.